NATIONAL GEOGRAPHIC

Con *e* de extraordinaria

Irracional y trascendente, el *e* es uno de esos números que ocupa un lugar destacado en las matemáticas, al igual que π o el llamado número de oro, simbolizado por la letra griega φ. Todos han protagonizado anécdotas históricas y han aportado a los matemáticos importantes aplicaciones prácticas. El número *e*, extraordinario protagonista de este libro, fue pieza clave en el descubrimiento de los logaritmos y es esencial en fórmulas muy utilizadas en física, economía y biología. Pero *e* tiene, además, un atributo único: forma parte de la fórmula de Euler, considerada la más bella del mundo. ¿Qué más se le puede pedir a un número?

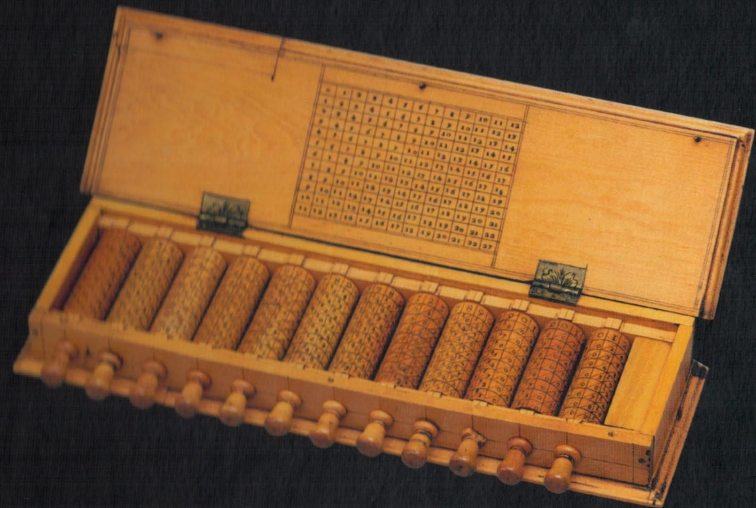
El mundo es matemático

Con *e* de extraordinaria

NATIONAL GEOGRAPHIC

Con *e* de extraordinaria

Historia y aplicaciones de la constante *e*



El mundo es matemático

Realización: EDITEC
Diseño cubierta: Llorenç Martí
Infografías: Joan Pejoan
Fotografías: Archivo RBA: 11, 15, 19, 22, 26, 33, 43, 47, 61, 63, 65, 70, 74, 93, 96, 98, 102, 107; Serge Galacktionov/123RF: 24; Galilea/Museos Capitolinos, Vaticano: 83; iStockphoto: 117, 118a, 118b.

ISBN: 978-84-473-8275-0
Depósito legal: B 16861-2015

Impreso y encuadernado en Gráficas Estella

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Prefacio

Existen algunos números que, a lo largo de la historia, han llegado a hacerse enormemente famosos por motivos diversos. En algunos casos, su fama se debe simplemente a coincidencias históricas; a veces el número en cuestión aparece en el centro de algún hallazgo científico muy relevante, como sucedió con la raíz cuadrada de 2, asociada al descubrimiento de los números irracionales, y también con el número π, que se vincula, entre otras cosas, al célebre problema de la cuadratura del círculo.

Otros números, en cambio, se han hecho enormemente conocidos porque intervienen en fórmulas muy útiles e interesantes. Ésa es otra de las razones de la fama de π, esencial, por ejemplo, para el cálculo de la longitud de la circunferencia o del área del círculo. Aunque también puede haber razones estéticas, como cuando un número determinado aparece en fórmulas o en teoremas que resultan elegantes o sorprendentes. A eso es debida la fama del llamado *número de oro*, que suele ser indicado con la letra griega Φ (léase *fi*), un número que permite diseñar rectángulos con proporciones que son muy agradables a la vista, por lo que aparece en numerosos diseños arquitectónicos e incluso gráficos.

En este libro hablaremos de un número no menos famoso que los que acabamos de mencionar. Se trata del número *e*, el número que en 1731 el matemático suizo Leonhard Euler decidió llamar con esta letra, aunque, como veremos, ya era conocido desde casi dos siglos antes de ser nombrado por este insigne científico.

Y ¿cuál es la causa de su fama?, ¿quizá su implicación en fórmulas de gran utilidad, determinadas razones históricas, o ciertos motivos estéticos? En el caso de *e*, las tres respuestas son ciertas. En efecto, el número *e* forma parte, como veremos más adelante, de fórmulas muy útiles. Como las que describen, por ejemplo, la evolución de un capital que se incrementa en sentido inverso a un interés compuesto, el crecimiento de las poblaciones de bacterias, o el decaimiento de las sustancias radiactivas. Asimismo, aparece en fórmulas que son esenciales para el cálculo de probabilidades y juega un papel central en el cálculo diferencial, una de las ramas de las matemáticas con más aplicaciones prácticas.

Tampoco se le puede negar su interés histórico pues, como descubriremos, el número *e* está fuertemente asociado tanto al descubrimiento de los logaritmos como al problema de la cuadratura del círculo.

Y en cuanto a los aspectos estéticos…¿sabían que el número *e* forma parte de la que se considera la «fórmula más bella del mundo»? Se trata de la célebre fórmula de Euler, $e^{i\pi}+1=0$, que en 1988 fue elegida por los lectores de la revista *Mathematical Intelligencer* como la fórmula matemática «más bella de la historia».

En resumen, ciertamente esta obra habla de un número, tan sólo de un número, pero hay tanto que decir de él, tanto que explicar... Y eso es lo que haremos desde la primera página del libro. Explicarles los entresijos de *e* de la forma más amena posible. Porque como dijo el astrónomo Tycho Brahe en 1596 «la verdad matemática prefiere palabras simples, ya que el lenguaje de la verdad es simple en sí mismo».

Capítulo 1

El descubrimiento del número *e*

¿Qué significa *descubrir* un número? ¿Acaso el número *e* estaba oculto a la espera de que su existencia fuese de algún modo reconocida? La respuesta es que sí; aunque hoy en día sabemos que el número *e* es esencial para la descripción matemática de muchos fenómenos, ya sean físicos, económicos, biológicos u otros, ese papel central tardó milenios en ser advertido. Y hablamos de milenios porque, a diferencia de π, que ya era conocido por los antiguos egipcios, y también por los sumerios, los chinos y otras culturas que existieron siglos antes de nuestra era, el número *e* ingresó en la historia de las matemáticas hace relativamente poco, a principios del siglo XVII. Es muy probable que esto se deba a que, mientras que π tiene una definición geométrica muy sencilla (es el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro), el número *e*, como veremos a continuación, tiene una definición bastante más compleja; tanto, que hubo varios «avistamientos parciales» de *e* antes de que éste fuese definitivamente hallado.

Aquí hablaremos de cuál es exactamente la definición del número *e* y de cómo sus primeras apariciones en la historia de las matemáticas estuvieron estrechamente ligadas a la historia de los logaritmos. Empecemos con ellos.

Los logaritmos, una idea genial para simplificar los cálculos

Los siglos XVI y XVII fueron, para Europa, un tiempo de gran expansión económica. La conquista de América y la subsecuente explotación de sus riquezas naturales, así como el aprovechamiento de los recursos de las colonias asiáticas y africanas, determinaron el fin de la Edad Media y el ascenso de una nueva clase social, la burguesía. La sociedad feudal del Medioevo fue paulatinamente reemplazada por una sociedad mercantilista en la que se propiciaba la acumulación y la circulación del dinero.

En esa misma época, las matemáticas, la astronomía y la física, ciencias que en Europa habían quedado prácticamente estancadas desde el siglo IV, reverdecieron e iniciaron un proceso de desarrollo imparable. Entre muchos de aquellos grandes científicos destacan, por ejemplo, Nicolás Copérnico (1473-1543), Michael Stifel (1487–1567), Galileo Galilei (1564–1642) y Johannes Kepler (1571-1630).

Estos cambios científicos y económicos impulsaron la necesidad de realizar cálculos cada vez más complejos, ya fuera para computar las órbitas de los planetas, establecer la posición de un barco en alta mar o cuantificar las ganancias obtenidas gracias a la distribución y venta de ciertas mercancías traídas de ultramar. Por ese motivo se desarrollaron diversos métodos para efectuar cálculos difíciles de manera rápida y precisa. Y también algún invento, como la *pascalina*, ideada en 1642 por el matemático y filósofo Blaise Pascal (1623-1662). Una máquina que, a base de ruedas y engranajes, permitía sumar y restar rápidamente números de varias cifras y que se considera la precursora de las actuales calculadoras electrónicas.

Sin embargo, de todos los sistemas para efectuar cálculos difíciles, el más importante y duradero fue, sin duda, el *método de los logaritmos*, desarrollado independientemente por el suizo Jobst Bürgi y el escocés John Napier entre finales del siglo XVI y mediados del XVII. Este método fue usado de manera ininterrumpida durante más de 350 años, desde que Napier lo hizo público en 1614 hasta el comienzo de la difusión masiva de las calculadoras electrónicas en la década de 1970. Una anécdota: Jobst Bürgi fue el primero en concebir la idea de los logaritmos en 1586, pero no lo hizo público hasta 1620. En cambio Napier publicó su hallazgo en 1614 y por ello es considerado por muchos historiadores como el descubridor de esos números tan útiles para simplificar los cálculos.

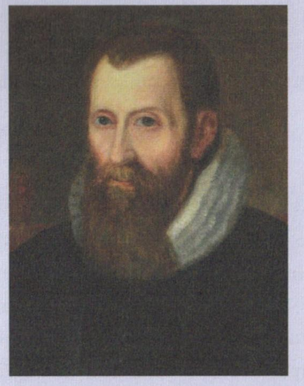
Es interesante mencionar que el modo en que Napier y Bürgi plantearon los logaritmos no es igual a la manera en que se los define hoy en día. En la actualidad los logaritmos están asociados a la noción de *exponente*. Según la explicación moderna de los logaritmos, en la igualdad $2^3=8$, el número 2 es la base de la potencia y el 3 es el exponente. Ahora bien, en esta misma igualdad «3 es el logaritmo en base 2 de 8», frase que en símbolos matemáticos se escribe así: $\log_2(8)=3$ porque 3 es el exponente al que hay que elevar al 2 para obtener 8. Generalizando este ejemplo, la definición nos dice que el logaritmo en base 2 de un número A (que debe ser necesariamente positivo) es el exponente al que debe ser elevado el número 2 para que el resultado sea A:

es igual a

$$\log_2(A) = B \text{ si } 2^B = A$$

elevado a la

JOHN NAPIER (1550-1617) Y EL ORIGEN DE LOS LOGARITMOS



John Napier nació en el castillo de Merchiston, Escocia, en 1550. La familia Napier, una de las más influyentes del mencionado reino, era dueña de ese castillo y gobernaba la región circundante desde 1430.

Desde muy pequeño, Napier mostró grandes habilidades para las matemáticas y es por eso que en 1563, a la edad de 13 años, ingresó en la Universidad de St. Andrews para estudiar esa ciencia. Sin embargo, al poco tiempo, tal vez como consecuencia de la muerte de su madre, se interesó más por el estudio de la teología. De hecho, de ahí en adelante siempre consideró que la teología era su campo principal de trabajo mientras que las matemáticas eran solamente una afición secundaria. A pesar de ello, Napier es recordado sobre todo por su trabajo con los logaritmos. Y es que la utilidad del método de los logaritmos para efectuar rápidamente cálculos complejos facilitó mucho el trabajo de los científicos. Como escribió un gran admirador suyo, Pierre Simón Laplace (1749-1827): «Al abreviar su trabajo, duplicó la vida de los astrónomos». John Napier falleció en Edimburgo, Escocia, el 4 de abril de 1617.

De esta manera, $\log_2(16)=4$ porque $2^4=16$ y $\log_2(1)=0$ porque $2^0=1$. El número 2 es, en estos ejemplos, la *base* del logaritmo. Pero esta base puede ser en realidad cualquier otro número positivo (distinto de 1); así, por ejemplo, dado que $3^2=9$, entonces $\log_3(9)=2$ y $\log_4(64)=3$ porque $4^3=64$.

Sin embargo, los logaritmos, tal como los concibieron Napier y Bürgi, estaban definidos de una manera diferente. Para estos matemáticos los logaritmos surgen de la comparación de dos sucesiones de números, una sucesión *aritmética* y otra *geométrica*. Una sucesión aritmética es aquella que comienza con un número cualquiera, por ejemplo el 0, al que se le va sumando una cantidad fija; por ejemplo, si al número 0 le vamos sumando 1 cada vez, obtenemos la sucesión 0, 1, 2, 3, 4, 5,...

En una sucesión geométrica también comenzamos por un número cualquiera, pero en este caso lo vamos multiplicando por un valor fijo, que es llamado la *razón* de la sucesión. Por ejemplo, si comenzamos con el 1 y vamos multiplicando cada vez por 2 obtenemos 1, 2, 4, 8, 16,...tal y como se aprecia a continuación:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Arriba, una sucesión aritmética (logaritmos); abajo, una sucesión geométrica (antilogaritmos).

Napier llamó *logaritmos* a los números de la primera sucesión (palabra que viene de los términos griegos *logos* y *arithmos*, que significan respectivamente *razón* y *número*), y *antilogaritmos* a los números de la segunda.

Observemos que la sucesión inferior está formada por los números 2^0, 2^1, 2^2, 2^3,...por lo que, según la definición actual de los logaritmos, los números de la fila superior son exactamente los logaritmos en base 2 de los números de la fila inferior; en efecto, $\log_2(1)=0$, $\log_2(2)=1$, $\log_2(4)=2$ y así continuamente. Traducido al lenguaje moderno, podemos decir que la figura anterior nos muestra una *tabla de logaritmos en base 2*. De manera similar, si en la fila inferior escribiéramos la sucesión 1, 3, 9, 27, 81,.... tendríamos una tabla de logaritmos en base 3; si en la fila inferior la sucesión fuera 1, 4, 16, 64, 256,... tendríamos una tabla de logaritmos en base 4; y así sucesivamente.

Ahora bien ¿cómo es que estas sucesiones sirven de ayuda para efectuar cómputos difíciles? Aunque los logaritmos permiten realizar una gran variedad de cálculos, para nuestros fines bastará con mostrar un ejemplo sencillo de cómo los logaritmos pueden ayudar a obtener la raíz cuadrada de un número. Comencemos observando que la suma o resta de dos números de la sucesión superior se corresponde con la multiplicación o división de los números respectivos de la sucesión inferior. Por ejemplo, el cálculo $2+5=7$ en la fila superior se corresponde con el cálculo $4 \cdot 32=128$ en la inferior, como vemos en la figura siguiente:

+ =

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

× =

Una suma en la fila superior se corresponde con un producto en la inferior.

De manera similar, si calculamos el doble de un número de la fila superior (es decir, si *sumamos* ese número consigo mismo) esto se corresponde, en la inferior, con elevar al cuadrado (es decir, corresponde a *multiplicar* el número de la fila inferior por sí mismo). Con la misma idea, calcular la *mitad* de un número de la fila superior equivale a calcular la *raíz cuadrada* en la inferior, tal y como muestra la figura:

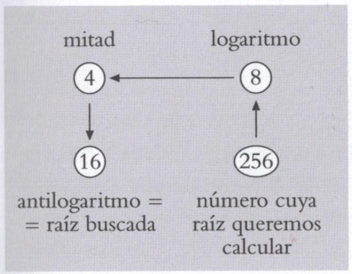
mitad

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

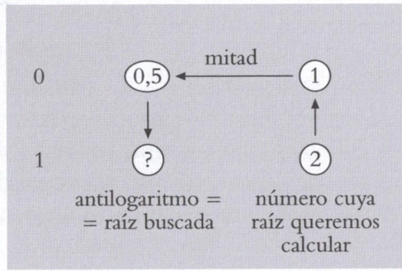
raíz cuadrada

La mitad de 8 es 4 y la raíz cuadrada de 256 es 16.

Mostremos dos ejemplos de cómo estas relaciones nos ayudan a calcular, por un lado, la raíz cuadrada de 256, y por el otro, una aproximación de la raíz cuadrada de 2.



Cálculo de la raíz cuadrada de 256



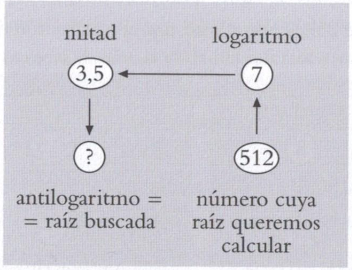
Cálculo de la raíz cuadrada de 2

Para calcular la raíz cuadrada de 256, primero hay que buscar ese número en la fila inferior, como se ve en la parte izquierda de la figura. Luego pasamos a la fila superior (obtenemos 8) y calculamos su mitad (que nos da 4). Finalmente, volvemos a la fila inferior y llegamos al número 16, que es la raíz cuadrada buscada. En efecto, $\sqrt{256}=16$. La ventaja del método, por supuesto, consiste en que calcular la mitad de un número es mucho más sencillo que hallar su raíz cuadrada.

Veamos ahora el segundo ejemplo. Para obtener $\sqrt{2}$ (parte derecha de la figura) primero buscamos el número 2 en fila inferior, pasamos entonces a la fila superior (es decir, buscamos su logaritmo) y llegamos así al 1. Luego hallamos la mitad de este número y obtenemos 0,5. El número buscado es, entonces, el antilogaritmo de 0,5. Pero aquí surge un problema porque, como puede verse en la primera tabla presentada, el antilogaritmo de 0,5 *no está en la tabla*. Estamos obligados, en consecuencia, a hallar un valor aproximado de ese antilogaritmo, lo que haremos así: dado que (en la fila superior) 0,5 es el punto medio entre 0 y 1, entonces, en la fila inferior seleccionamos, a modo de aproximación, el punto medio entre 1 y 2. Esto nos dice que la raíz cuadrada de 2 vale aproximadamente 1,5.

Dado que el valor exacto de $\sqrt{2}$ comienza con 1,4142... podemos decir que el resultado obtenido es bastante acertado.

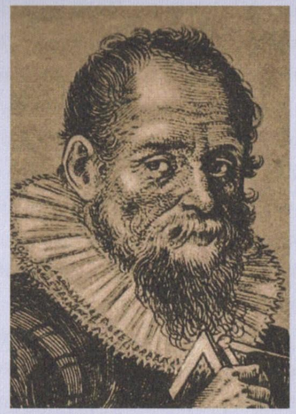
¿Cómo calcularíamos, con el mismo procedimiento, la raíz cuadrada de 512? El logaritmo de 512 es 7, cuya mitad es 3,5, y dado que éste es el punto medio entre 3 y 4, la aproximación que obtenemos para la raíz cuadrada de 512 es el punto medio entre 8 y 16, que es 12 (véase la figura siguiente). En otras palabras, nuestro cálculo nos dice que $\sqrt{512}$ es aproximadamente 12.



Cálculo de la raíz cuadrada de 512

Sin embargo, la raíz cuadrada de 512 es 22,674... ¿Por qué en este caso la aproximación no es tan buena como cuando calculamos $\sqrt{2}$? La explicación es que, al equiparar el punto medio de dos números de la fila superior con el punto medio de los números correspondientes en la inferior, estamos suponiendo implícitamente que las dos sucesiones crecen al mismo ritmo. Pero eso no es cierto, ya que es evidente que la sucesión inferior crece más rápidamente que la superior, y es por eso que sólo obtenemos un resultado aproximado, que puede ser más o menos cercano al resultado exacto. Los ejemplos anteriores nos muestran lo siguiente: tal como hicimos con el cálculo de $\sqrt{2}$, si trabajamos en una sección de la tabla donde los antilogaritmos todavía no se han separado mucho entre sí, el error que se comete al equiparar el punto medio entre dos números de la fila superior con

JOBST BÜRGI (1552-1632), UN MATEMÁTICO HABILIDOSO



Jobst Bürgi nació en la ciudad suiza de Lichtensteig el 28 de febrero de 1552. No sólo fue astrónomo y matemático, sino que además destacó en la elaboración de instrumentos científicos de precisión, habilidad que comenzó a desarrollar entre 1570 y 1574, cuando colaboró en la construcción del reloj astronómico de la catedral de Nuestra Señora de Estrasburgo. Ese reloj, cuya construcción había comenzado en 1547, indicaba el movimiento de los planetas sobre un astrolabio e incluía un calendario perpetuo.

En 1579 Guillermo IV, príncipe de Hesse-Kassel, un estado por entonces independiente que hoy forma parte de Alemania, encargó a Bürgi que diseñara y construyera instrumentos astronómicos que permitieran verificar la teoría heliocéntrica de Copérnico. El propio Guillermo era un astrónomo notable y gracias a los instrumentos creados por Bürgi logró hacer observaciones extraordinariamente precisas de las posiciones de las estrellas fijas. Fue entonces cuando éste concibió la idea de los logaritmos aunque, como ya se ha comentado, no publicó su hallazgo hasta unos cuarenta años más tarde.

En 1601, Bürgi viajó a Praga para trabajar como asistente de Johannes Kepler y en ese contexto le comunicó privadamente su método de cálculo mediante logaritmos. Gracias a ello, los laboriosos cálculos astronómicos de Kepler se simplificaron tanto que él mismo convenció a Bürgi de que los hiciera públicos para beneficiar así a todos los astrónomos de Europa.

Bürgi pasó el resto de su vida en Praga, aunque visitaba frecuentemente Hesse-Kassel, donde precisamente falleció el 31 de enero de 1632. Su epitafio lo define como un «ingenioso diseñador de instrumentos de medida y de bóvedas celestes, constructor de los relojes más precisos del siglo XVI, inventor de los logaritmos».

el que le corresponde de la fila inferior no es muy grande, por lo que se obtiene una aproximación muy aceptable. En cambio, en una parte de la tabla en la que los antilogaritmos ya se hayan espaciado mucho, el error cometido en la aproximación aumentará de modo significativo, tal como sucedió en nuestro ejemplo con el cálculo de $\sqrt{512}$.

Bürgi vislumbra por primera vez el número *e*

Tanto Napier como Bürgi se dieron cuenta de que era necesario elegir una sucesión geométrica que no creciera muy rápidamente, de manera que la distancia entre dos términos consecutivos aumentara a un ritmo razonablemente lento. En los ejemplos anteriores hemos usado una razón geométrica de razón 2; si la razón fuera 3 el crecimiento sería aún más rápido, en lugar de más lento. Debemos buscar entonces una sucesión geométrica con una razón que sea menor que 2. El número 1 sería una mala elección porque si multiplicáramos cada vez por 1 obtendríamos siempre el mismo número (1, 1, 1, 1,...) y la sucesión que se generaría no tendría ninguna utilidad. Por tanto, debemos escoger una razón que sea muy cercana al número 1.

Mientras que Napier usó una razón que era ligeramente *menor* que 1 (tomó el número 0,9999999), Bürgi empleó una ligeramente mayor que 1, y gracias a eso, obtuvo el primer vislumbre del número *e*. No obstante, el número *e* ha sido llamado a veces el *número de Napier* pero nunca el *número de Bürgi*, nombre que hubiera sido históricamente más adecuado.

Concretamente, Bürgi usó como razón para su progresión geométrica el número 1,0001, mientras que para construir su progresión aritmética fue sumando cada vez 0,0001. Los primeros términos de esas dos sucesiones son:

0	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004
1	1,0001	$1{,}0001^2$	$1{,}0001^3$	$1{,}0001^4$

En la tabla de logaritmos que usó Bürgi, la sucesión geométrica tiene razón 1,0001 y la aritmética se obtiene sumando 0,0001.

Estrictamente hablando, en la tabla original de Bürgi todos los números de la progresión geométrica estaban multiplicados por

$$0{,}00000001 = \frac{1}{10^8}$$

para hacer aún más lento su crecimiento. En nuestra explicación estamos omitiendo este factor, una decisión que facilita los cálculos sin afectar la idea más esencial.

Según dijimos antes, la primera tabla del capítulo es una tabla de logaritmos en base 2. Con esta misma idea ¿a qué base corresponde la tabla de Bürgi? Si llamamos b a esa base tenemos, por ejemplo, que $b^{0{,}0001} = 1{,}0001$, igualdad de la que se deduce que $b = 1{,}0001^{10.000}$, es decir,

$$b = \left(1 + \frac{1}{10.000}\right)^{10.000},$$

que vale aproximadamente 2,7181459268. Como veremos enseguida, inadvertidamente y de modo indirecto, Bürgi acababa de introducir la primera aproximación conocida del número *e*.

¿Cómo se define exactamente el número *e*? Supongamos que calculamos sucesivamente $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \left(1+\frac{1}{5}\right)^5, \left(1+\frac{1}{6}\right)^6, \ldots$ En otras palabras, en la fórmula $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ estamos reemplazando la letra n por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6,... Volquemos los resultados obtenidos en la siguiente tabla (con un redondeo a 10 decimales):

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,3703703704
4	2,44140625
5	2,48832
6	2,5216263717
10	2,5937424601
100	2,7048138294
1.000	2,7169239322
10.000	2,7181459268
100.000	2,7182682372
1.000.000	2,7182804693

A medida que el valor de n aumenta, los resultados que se obtienen se van acercando cada vez más a un número específico, un número que empieza con 2,71828182845904523536... y que es precisamente el número e, al que podemos definir como el valor al que se van acercando sucesivamente los resultados de

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

cuando n va representando los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6,...

Si, tal como es, pensamos en la tabla de Bürgi como una tabla de logaritmos, su base es

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

con $n = 10.000$, es decir, una buena aproximación del número e.

Napier, como ya dijimos, usó como razón el número $0{,}9999999 = 1-\frac{1}{10^7}$, mientras que su sucesión aritmética se obtenía sumando $\frac{1}{10^7}$. Un razonamiento similar al que hemos hecho más arriba nos muestra que la base de los logaritmos de Napier era $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$, que es 0,367879422971 (redondeado a doce cifras decimales). Como veremos, mientras que la base de Bürgi es una buena aproximación de e, la de Napier es una buena aproximación del número $\frac{1}{e}$. (Ambos multiplicaban su sucesión geométrica por un factor que redujera aún más su «velocidad», en este caso ese factor, que también hemos omitido en el cálculo, era $\frac{1}{10^7}$).

¿Fue consciente Bürgi de que, implícitamente, estaba obteniendo una buena aproximación de una de las constantes fundamentales de la naturaleza? Seguramente no. Como sucedió con otros tantos descubrimientos (científicos o de otro tipo), fueron otros matemáticos quienes pusieron de manifiesto la importancia de su hallazgo.

El área bajo la hipérbola

Napier falleció pocos años después de hacer público su método de los logaritmos y su trabajo sobre este tema fue continuado por el matemático inglés Henry Briggs (1561-1630).

LAS TABLAS DE LOGARITMOS

La imagen muestra un fragmento de una típica tabla de logaritmos decimales, como las que se usaron durante siglos para efectuar cálculos complejos.

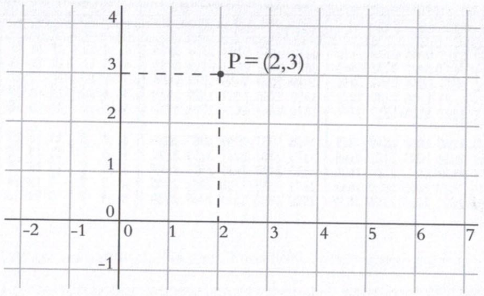
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes Proporcionales								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20

Por ejemplo, el número destacado está indicando que el logaritmo decimal de 11,1 es aproximadamente 1,0453 (el 1 delante de la coma está sobreentendido en la tabla). Las tres últimas columnas, agrupadas bajo el título «Partes Proporcionales», sirven de ayuda para calcular aproximadamente los antilogaritmos de números que no están en la tabla.

Briggs entendía que para efectuar cálculos difíciles era más conveniente trabajar con logaritmos en base 10 debido a que el 10 es la base de nuestro sistema de numeración. Por ello, en 1624, Briggs publicó la que puede considerarse la primera tabla moderna de logaritmos; en ésta no aparecían una sucesión geométrica y una aritmética, sino todos los números entre 1 y 20.000, y entre 90.000 y 100.000 con sus respetivos logaritmos decimales (que es como suele llamarse a los logaritmos en base 10) calculados con 14 cifras decimales exactas. Hay que decir que la idea de Briggs fue completamente acertada; en efecto, los logaritmos en base 10 se usaron desde entonces y hasta la década de 1970 para efectuar cálculos complejos. Durante todo ese tiempo no faltaron en la mesa de trabajo de cualquier persona asociada a una disciplina técnica o científica unas tablas similares a las que Briggs publicó en 1624. (Todavía hoy, las calculadoras científicas suelen tener una tecla que calcula el logaritmo decimal de un número x, operación que habitualmente se escribe $\log(x)$ omitiendo el subíndice 10.)

Pero volvamos ahora a la historia del descubrimiento de e. Antes de describir el siguiente avistamiento es necesario hablar de las coordenadas de un punto.

De manera similar a lo que sucede en un mapa, las posiciones de los puntos del plano pueden describirse mediante dos coordenadas, la abscisa y la ordenada, que son equivalentes, en el caso de un mapa, a la longitud y la latitud. Para establecer estas coordenadas se trazan, tal como se aprecia en la figura, dos ejes de coordenadas, uno horizontal y otro vertical; la abscisa del punto se obtiene proyectándolo sobre el eje horizontal, y su ordenada, sobre el eje vertical.



La abscisa del punto P es 2 y su ordenada es 3.

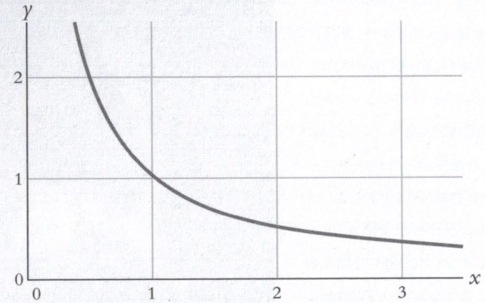
Alrededor de 1630 el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) y el abogado y brillante matemático *amateur* Pierre de Fermat (1601-1665) concibieron, cada uno por su lado, la idea de que basándose en un sistema de coordenadas era posible describir una curva (un «objeto geométrico») mediante una fórmula (un «objeto analítico»); esta idea fue el inicio de la *geometría analítica*, una fértil rama de las matemáticas que abrió nuevos y muy profundos caminos en esa ciencia y cuya importancia no ha disminuido a día de hoy.

Aunque Fermat concibió la idea unos pocos años antes que Descartes, fue éste quien la publicó primero y por ello muchos libros de historia le atribuyen la creación de la geometría analítica. Más aún, el sistema de coordenadas como el mostrado en la figura anterior es llamado habitualmente un sistema *cartesiano*, palabra que viene de Cartesio, versión latina del apellido Descartes.

La abscisa de un punto (la primera coordenada) suele ser indicada con la letra x, mientras que la otra coordenada suele ser indicada con la letra y. A modo de ejemplo, tomemos la fórmula $xy=1$. ¿Cómo es que esta fórmula describe una curva? La fórmula $xy=1$ nos dice que estamos considerando que el producto de las dos coordenadas de cada punto es 1; algunos de estos puntos son, por ejemplo,

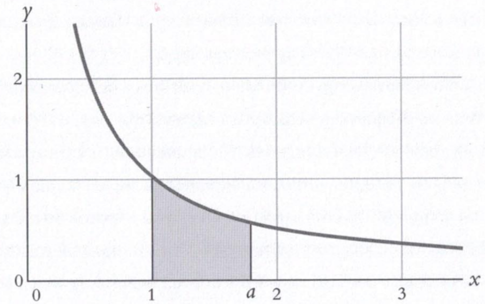
$$(1,1), \left(\frac{1}{2},2\right), \left(\frac{1}{3},3\right), \left(\frac{1}{10},10\right) \text{ o } \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right),$$

ya que en todos ellos, en efecto, el producto de las dos coordenadas es igual a 1 (para simplificar nos limitamos solamente a los puntos que tienen coordenadas positivas, una restricción que tiene un sentido histórico ya que en la primera mitad del siglo XVII la mayoría de los matemáticos rechazaba la existencia de los números negativos). Ahora bien, si pudiéramos marcar en el sistema de ejes cartesianos *todos* los infinitos puntos que cumplen la relación $xy=1$ obtendríamos, tal como dijimos antes, una curva, en este caso una *hipérbola*:



Hipérbola definida por la relación xy = 1.

Pero en 1661 el matemático y físico holandés Christiaan Huygens se hizo la siguiente pregunta: si en el eje horizontal elegimos un número $a > 1$ ¿cuánto valdrá el área de la región comprendida entre la hipérbola y el eje x, y entre los números 1 y a, región que se muestra en la figura siguiente?



Región comprendida entre la hipérbola y el eje x, y entre los números 1 y a, cuya área calculó Huygens en 1661.

CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695), ASTRÓNOMO Y RELOJERO

Retrato de Huygens, obra del pintor holandés Caspar Netscher.

Christiaan Huygens nació en La Haya, Países Bajos, el 14 de abril de 1629. Fue matemático, astrónomo y físico, y también estudió leyes. En 1654 creó un método para tallar lentes de gran calidad y con ellas construyó el telescopio que le permitió detectar, en 1655, la luna Titán, el primer satélite descubierto de Saturno. Al año siguiente, descubrió que la forma que Galileo había observado en las cercanías de Saturno era, en realidad, un anillo que circundaba al planeta, y en 1659 publicó un trabajo sobre el movimiento de dicho anillo. Además, como sus observaciones astronómicas requerían mediciones muy precisas de tiempo, Huygens diseñó y construyó el primer reloj de péndulo de precisión, una patente que le permitió ganar una buena suma de dinero.

Como matemático fue uno de los precursores del cálculo; también escribió, en 1657, el libro *De Ratiociniis in Ludo Aleae* («Sobre el razonamiento en los juegos de azar»), que fue la primera obra publicada sobre teoría de probabilidades.

Como físico, estudió el movimiento del péndulo, la dinámica del movimiento circular uniforme y la teoría de los choques de cuerpos elásticos, en la que puso de manifiesto algunos errores que había cometido René Descartes. Sin embargo, es más recordado por haber sido quien formuló, en 1678, la teoría ondulatoria de la luz, en la que afirma que ésta se propaga como una onda. Durante siglos, esta teoría de Huygens estuvo en pugna con la teoría corpuscular formulada por Newton, que afirmaba que la luz está formada por partículas. Desde principios del siglo XX se sabe que, en realidad, la verdadera naturaleza de la luz implica una combinación de ambas teorías. Christiaan Huygens falleció en La Haya el 8 de julio de 1695.

El problema general de hallar el área de la región comprendida entre una curva cualquiera y el eje horizontal fue resuelto unos veinte años más tarde de manera independiente por Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716); la resolución de esa incógnita es uno de los pilares del cálculo, rama fundamental de la matemática creada por esos dos notables científicos. Pero Huygens, aunque no resolvió el problema general, sí halló, como dijimos más arriba, la manera de resolverlo para el caso de la hipérbola. En esa época ya se había generalizado el uso de las tablas de logaritmos decimales para hacer cálculo y Huygens expresó el área en términos de esos logaritmos. Concretamente, el matemático holandés estableció que el área de la región de la figura anterior es igual al logaritmo en base 10 de a dividido por una cierta constante, que Huygens calculó con 17 cifras decimales exactas, y cuya expresión comienza con 0,434294… No está claro si Huygens logró ver la relación que existe entre esta constante y el número e (que todavía no se llamaba así, aunque ya había sido identificado como la base de los logaritmos de Bürgi), pero lo cierto es que esa relación existe, ya que la constante de Huygens no es otra cosa que el logaritmo en base 10 de e. En efecto, hoy en día se sabe que:

$$\text{Área bajo la hipérbola entre 1 y } a \text{ (con } a > 1) = \frac{\log(a)}{\log(e)}.$$

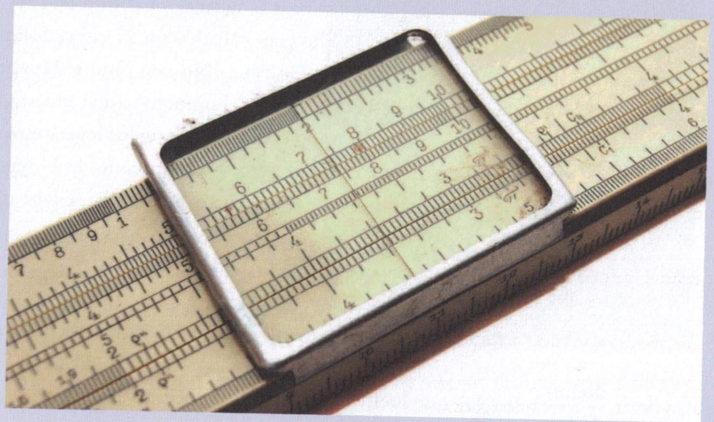
También se sabe actualmente que $\frac{\log(a)}{\log(e)}$ es exactamente el logaritmo en base e de a, es decir, $\frac{\log(a)}{\log(e)} = \log_e(a)$ que suele ser llamado el «logaritmo natural de a» (o a veces, como ya dijimos «logaritmo neperiano de a») y que se expresa $\ln(a)$. La frase «logaritmo natural» para referirse al logaritmo en base e —aunque e todavía no tenía ese nombre— fue usada por primera vez en 1668 por el famoso geómetra y cartógrafo Nicolás Mercator (1620-1687) en su obra *Logarithmotechnia*.

De modo que Huygens también se encontró, una vez más indirectamente, con el número e. Pero fue Leibniz, en una carta que precisamente escribió a Huygens en 1690, quien designó por primera vez a este número con una letra específica, concretamente la letra b; faltaban aún unas décadas para que el nombre con el que lo conocemos actualmente le fuera impuesto. Pero lo importante es que ya había sido descubierto y definido, y aunque el número e no surgió asociado a los logaritmos, sí fue una consecuencia del desarrollo del mercantilismo. De hecho, la primera definición formal de e provino de un problema relacionado con el cálculo de intereses bancarios.

LA REGLA DE CÁLCULO

La regla de cálculo es un instrumento diseñado para hacer cálculos complejos muy usado desde su creación a mediados del siglo XVI hasta la difusión de las calculadoras electrónicas portátiles a fines del siglo XX. Su funcionamiento estaba basado en los logaritmos, por lo que podría ser considerada como una «tabla de logaritmos mecánica».

No se sabe con certeza quién fue su creador. Mientras que algunos historiadores atribuyen su invención al matemático inglés Edmund Wingate (1596-1656), otros consideran que el inventor fue su compatriota el reverendo y matemático William Oughtred (1574-1660).



¡Al fin! Jakob Bernoulli descubre el número *e*

Planteemos, para comenzar, un ejemplo hipotético. Pongamos que tenemos 100 euros y que los colocamos en el banco a un interés compuesto del 100% anual y supongamos, además, que la capitalización de los intereses también es anual. Esto quiere decir que, al cabo de un año, a nuestro capital inicial de 100 euros se le habrán agregado otros 100 de intereses (el 100% de 100) y que tendremos entonces 200 euros.

¿Pero qué sucederá si la capitalización es semestral? En ese caso, al terminar el primer semestre se sumará a nuestro capital inicial un 50% de intereses (la mitad de la tasa total ya que sólo transcurrió la mitad del año). Es decir, al cabo del primer

semestre tendremos 150 euros, y los intereses del segundo semestre se calcularán, no sobre los 100 iniciales, sino sobre estos 150 acumulados. Los intereses por el segundo semestre serán, entonces, 75 euros (el 50% de 150) y al final del año tendremos 225 euros, como se puede ver en la tabla:

Tiempo	Interés devengado	Capital acumulado
0	0	100
1/2 año	50	150
1 año	75	225

Observemos que sumarle un 50% al capital acumulado equivale a multiplicarlo por $\left(1+\frac{1}{2}\right)$; y, dado que la capitalización es semestral, habremos acumulado intereses dos veces en el año. Por lo tanto en el ejemplo anterior el capital ha sido multiplicado por $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$. En efecto: $100\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 225$.

Si la capitalización fuese trimestral, dado que en el año hay cuatro trimestres, acumularemos cuatro veces un interés del 25% y al cabo de un año el capital final será de $244{,}14 = 100\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$. En una capitalización bimestral el capital inicial se multiplicará por $\left(1+\frac{1}{6}\right)^6$, y si la capitalización es mensual, el capital final se obtendrá multiplicando los 100 euros iniciales por $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$. Pero si la capitalización es minuto a minuto, dado que hay 525.600 minutos en un año, el capital inicial se multiplicará por $\left(1+\frac{1}{525.600}\right)^{525.600}$, que es aproximadamente 2,7182792426 (con redondeo a diez cifras decimales) y tendremos así 271,83 euros.

En resumen, si la capitalización se produce n veces por año entonces el capital inicial deberá ser multiplicado por $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. ¿Pero qué sucederá si la capitalización

JAKOB BERNOULLI (1654-1705) Y LA ESPIRAL MARAVILLOSA

Jakob Bernoulli nació en Basilea, Suiza, el 27 de diciembre de 1654. Su padre, que era magistrado y miembro del concejo de gobierno de la ciudad, lo envió a la Universidad de Basilea a estudiar filosofía y teología y, en efecto, Jakob se graduó en ambas carreras en 1671 y 1676 respectivamente. Sin embargo, al mismo tiempo y contra los deseos de su padre, cursaba estudios de matemáticas y astronomía, sus verdaderas vocaciones. Quizá sin saberlo, Jakob abrió un camino que sería seguido por muchos otros miembros de la familia. Su hermano Johann, los tres hijos de éste y dos de sus nietos fueron todos matemáticos o físicos. Jakob hizo contribuciones fundamentales al cálculo diferencial y a la física matemática. Su hermano trabajó en las mismas áreas, lo que propició que muchas veces tuvieran agrias discusiones sobre la prioridad de ciertos descubrimientos.

Lápida de la tumba de Jakob Bernoulli.

Entre otras muchas aportaciones, Jakob fue el primero en estudiar en profundidad las propiedades de la espiral logarítmica, una curva frecuente en la naturaleza presente, por ejemplo, en la estructura de ciertos caracoles, algunos ciclones y también en la forma de algunas galaxias. Jakob llamó a esta curva *Spira mirabilis*, es decir, «la espiral maravillosa», y estaba tan fascinado por ella que pidió que fuera grabada en su tumba acompañada de la siguiente inscripción: «Me levantaré igual, aunque cambiado». Jakob Bernoulli falleció en Basilea el 16 de agosto de 1705.

es *continua*, es decir, si los intereses se calculan en *cada instante* de tiempo? En ese caso el capital inicial se multiplicará por el número al que se va acercando la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n se hace enormemente grande (cuando «n tiende al infinito», dicen los matemáticos). Según la definición dada algunas página atrás, ese valor es

precisamente el número e. Observemos que, puesto que e vale aproximadamente 2,718281828459…, entonces, a causa del redondeo a los céntimos, la capitalización continua nos dejará un capital final de 271,83 euros, el mismo que en la capitalización «segundo a segundo».

El primero en hacer estos cálculos fue el matemático suizo Jakob Bernoulli, quien, en 1683, identificó que el número por el que debía multiplicarse el capital inicial era el valor al que se acerca $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n tiende al infinito; ésa fue la primera vez en la historia de las matemáticas en que un número es definido como el resultado de un proceso infinito de aproximaciones sucesivas.

Es cierto que para calcular el valor de π también se requieren infinitas aproximaciones sucesivas, pero su *definición* (el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro) no hace referencia alguna a un procedimiento infinito. A eso nos referíamos al decir que la definición de e es mucho más compleja que la de π. En resumen, aunque Jakob Bernoulli no le dio un nombre específico ni tampoco, aparentemente, percibió la relación existente entre este número y los logaritmos, podemos decir con toda justicia que Bernoulli fue el verdadero «descubridor» de e.

En todos los cálculos anteriores, sin embargo, al deducir que si la capitalización de intereses es continua entonces el capital inicial se multiplica por e, hemos dado por sentado que la tasa de interés es del 100% anual. ¿Qué sucedería si fuera del 20% anual? En ese caso se puede comprobar, como ya hizo Bernoulli, que el capital inicial debe ser multiplicado por $e^{0,2}$. Si el interés fuera del 35% anual el capital se multiplicaría por $e^{0,35}$; y así sucesivamente. Estas reflexiones permiten definir de manera natural una *función*, uno de los conceptos más importantes de las matemáticas y una herramienta esencial a la hora de describir fenómenos físicos, biológicos o de cualquier otra índole.

Una función es, por definición, cualquier regla que a cada número x le asigne, de manera clara y definida, otro número y, tal y como se ilustra en la figura siguiente:

$$x \xrightarrow{\text{regla}} y \qquad \text{Por ejemplo:} \qquad x \xrightarrow{\text{regla}} e^x$$

Una función es una regla que a cada número x le asigna exactamente un único número y.

Aquí surge una función que a cada número x le asigna el número e^x. Es decir, aquella que al número 0,2 le asigna el número $e^{0,2}$, que al número 2 le asigna el número e^2, y así sucesivamente. Esta función recibe el nombre de *función exponencial* y su papel fundamental en las matemáticas se explica en los capítulos 3 y 5.

El primero en analizar explícitamente la función exponencial fue Johann Bernoulli (1667-1748), hermano de Jakob y también notable matemático. Johann publicó este estudio en 1697 en su obra *Principia calculi exponentialium seu percurrentium*, donde no sólo detalla las propiedades de esa función, sino que además —y probablemente fue el primero en hacerlo— observa la estrecha relación que existe entre la función exponencial y el logaritmo natural que, como ya dijimos, es el logaritmo en base e.

¿En qué consiste esta relación? Recordemos que el logaritmo natural de un número A, que se escribe $\ln(A)$, es el exponente al que hay que elevar al número e para obtener A. Por ejemplo, $\ln(e)=1$ porque $e^1=e$ (para que el resultado sea e el exponente debe ser 1) y $\ln(1)=0$ porque $e^0=1$ (para que el resultado sea 1 el exponente debe ser 0).

Observemos entonces que al número 0 la función exponencial le asigna el 1, ya que $e^0=1$; y que, precisamente por eso, el logaritmo natural, al número 1 le asigna el 0.

$$1 \xrightarrow{\text{función exponencial}} e \qquad e \xrightarrow{\text{logaritmo natural}} 1$$

Si al número x la función exponencial le asigna el número y, entonces el logaritmo natural hace exactamente la asignación inversa.

En resumen, si al número x la función exponencial le asigna el número y, entonces el logaritmo natural, que también es una función, hace exactamente la asignación opuesta. Se dice entonces que el logaritmo natural es la *función inversa* de la exponencial (y, viceversa, que la exponencial es la función inversa del logaritmo natural). Volveremos a este importante tema en el capítulo 3.

El nombre de este número extraordinario

Pero ni siquiera Johann Bernoulli, que tan profundamente estudió la función exponencial, le dio un nombre al número e. Quien finalmente lo designó con la letra con la que hoy lo conocemos fue el gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-

1783), quien también popularizó el uso de la letra π para designar al cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, e introdujo asimismo muchas otras notaciones matemáticas que se usan todavía hoy. Concretamente, Euler usó por primera vez la letra e para designar al número del que estamos hablando en una carta dirigida al matemático alemán Christian Goldbach (1690-1764) en 1731. En esa carta, escrita en latín y fechada el 5 de noviembre, Euler le cuenta a Goldbach el modo en que logró resolver el cálculo del área de la región ubicada debajo de cierta familia de curvas. En medio de ese procedimiento, Euler dice que una fórmula con la que está trabajando debe ser multiplicada por e^{lv-2v}, donde, agrega Euler, «e denota al número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a 1». Al decir «logaritmo hiperbólico» Euler está hablando del logaritmo natural; la palabra «hiperbólico» que él usa se refiere seguramente al hecho de que ese logaritmo es el que calcula el área bajo la hipérbola.

stantis non negligamus. Sumamus casum simplicissimum, quo $p=1$ et $n=1$, erit $dz-2zdv+\frac{zdv}{v}=\frac{dv}{v}$. Multiplicetur haec per e^{lv-2v}, seu quod idem est, per $e^{-2v}v$ (e denotat hic numerum, cujus logarithmus hyperbolicus est $=1$), prodibit $e^{-2v}vdz-2e^{-2v}zvdv+e^{-2v}zdv=e^{-2v}dv$, quae integrata

Fragmento de la transcripción de la carta en la que Leonhard Euler designa por primera vez al número e con ese nombre.

Euler no se limitó a darle al número e el nombre con el que hoy lo conocemos, también estudió muchas de sus propiedades y encontró varios métodos muy eficientes para calcularlo. Es decir, métodos que permiten obtener rápidamente aproximaciones de e con muchas cifras decimales, y que fueron especialmente útiles en la época anterior a las calculadoras electrónicas.

Capítulo 2

Cómo se calcula y qué calcula el número *e*

El número *e* interviene en una gran cantidad de fórmulas relacionadas con la biología, la física, la economía y muchas otras ramas de la ciencia. Si en el capítulo anterior se estableció la conexión que existe entre *e* y el cálculo del interés compuesto, ahora veremos otras situaciones en las que esta constante interviene de manera destacada.

Como ya dijimos, la escritura decimal del número *e* comienza con 2,718281828459... Pero ¿con cuántas cifras decimales es necesario trabajar en las aplicaciones prácticas? En realidad, en cualquier cálculo razonable, con dos o tres cifras basta y, aun en las circunstancias más extraordinarias, diez cifras son más que suficiente. Digamos, a modo de ejemplo, que depositamos en el banco un millón de euros durante un año al exorbitante interés del 100% anual. Ya sabemos que, para averiguar cuál será el capital acumulado al cabo de un año, ese millón de euros inicial debe ser multiplicado por *e*. Si tomamos como valor aproximado al número 2,71828183, es decir, si redondeamos a ocho cifras decimales, el cálculo nos da un capital acumulado final de 2.718.281,83 euros. Pero si en lugar de ocho cifras decimales empleáramos nueve, diez, once o cualquier otra cantidad mayor, el resultado sería, en la práctica, exactamente el mismo. Y es que 2.718.281,828459 euros, la cifra que obtenemos trabajando con doce decimales, es igual a 2.718.281,83 euros porque no tiene sentido considerar cantidades menores a un céntimo.

Pese a ello, en las épocas anteriores a los ordenadores electrónicos hubo personas que dedicaron años a calcular cientos y cientos de cifras decimales de *e*. Impulsados por la curiosidad científica, intentaban hallar patrones o regularidades en esa secuencia de cifras, o quizá, simplemente, los animaba un espíritu «deportivo» similar al que puede llevar a alguien a intentar convertirse en el corredor más rápido del mundo.

El tesón de los calculistas: calcular decimales de e

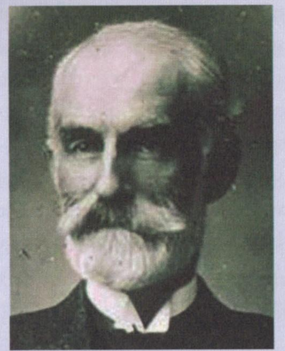
El primero en calcular una cantidad importante de dígitos de *e* fue Leonhard Euler, quien en 1748 publicó las primeras 23 cifras decimales de ese número en su obra *Introductio in Analysin infinitorum*. Su marca fue la mejor hasta que en 1853 el matemático inglés William Shanks hizo pública la lista de las primeras 137 cifras decimales de *e*. En 1871 el mismo Shanks alcanzó a calcular el dígito decimal número 205, pero cometió un error. Se equivocó en la cifra 188 y, lamentablemente, todas las cifras siguientes resultaron incorrectas. No fue hasta dos años después de su muerte, en 1884, cuando el fallo fue detectado por el ingeniero norteamericano John Marcus Boorman (1831-1909). Tras rectificarlo, Boorman calculó y publicó las primeras 346 cifras decimales de *e*, y estableció una marca que permaneció incólume hasta mediados del siglo XX, cuando se construyeron, por fin, los primeros ordenadores electrónicos.

Ese gran invento permitió abordar larguísimos cálculos con un nivel de precisión y a una velocidad desconocidas hasta el momento. Desde entonces la cantidad de cifras calculadas de *e* ha ido creciendo vertiginosamente. En 1949, el famoso matemático John von Neumann (1903-1957) programó el ordenador ENIAC, una de las primeras computadoras electrónicas de la historia, para que calculara los primeros 2.010 dígitos de *e*, casi sextuplicando la marca de Boorman. En 1961 un ordenador IBM 7090 —curiosamente, programado por un tal Daniel Shanks que, por lo que se sabe, no estaba emparentado con el célebre matemático— logró procesar más de cien mil dígitos. Treinta y un años más tarde, en 1994, ya fueron diez millones los dígitos de *e* calculados y en 1999 se alcanzó la cifra de 1.250.000.000. Hoy, la marca vigente data de julio de 2010, cuando se estableció, nada más y nada menos, el primer billón de dígitos decimales de *e*.

Si hace dos siglos, Shanks y Boorman lograban calcular, de media, un dígito cada cuatro o cinco días, medio siglo mas tarde, el ENIAC tardaba 70 horas en calcular los primeros 2.010 dígitos de *e*, a un promedio de, más o menos, un dígito cada dos minutos. Pero el ordenador que calculó el billón de cifras de *e* en 2010 necesitó sólo 224 horas en completar la tarea. ¿Saben lo que eso significa? Pues un promedio de 1.240.000 dígitos ¡por segundo!

¿Pero cómo se calculan los dígitos de *e*? ¿Cuál es la fórmula que permite obtenerlos? Recordemos que, como ya hemos visto, el número *e* se define como el valor al que se va acercando la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n es reemplazado sucesivamente por 1, 2, 3, 4, 5,... Cuanto mayor sea el valor de n, más cerca estará el resultado obtenido del verdadero valor de *e*, aunque nunca lo alcanzará en forma exacta. Por lo tanto, para obtener una buena aproximación de *e* o, lo que es lo mismo, para calcular

WILLIAM SHANKS, CALCULADOR DE DECIMALES POR AFICIÓN



William Shanks nació en Corsenside, Inglaterra, el 25 de enero de 1812. Era profesor de matemáticas y dedicaba gran parte de su tiempo libre a realizar largos y laboriosos cálculos. El más famoso de ellos es el cómputo que hizo de las primeras 707 cifras decimales de π, trabajo que completó en 1873 después de casi 15 años de labor. Al igual que le sucedió con el cálculo de las cifras de e, con el cómputo de los decimales del número π también cometió un error. Concretamente, en la cifra 528, a partir de la cual todos los dígitos resultaron ser erróneos. Pero Shanks, tal y como pasó con el error en la cifra 188 de e, murió antes de que el fallo fuera descubierto. El matemático también publicó una tabla con todos los números primos entre 1 y 60.000, y calculó los logaritmos de 2, 3, 5 y 10 con 137 decimales exactos. William Shanks falleció en Houghton-le-Spring, Inglaterra, el 17 de junio de 1882.

una buena cantidad de sus dígitos decimales, bastaría con encontrar el resultado de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tomando un valor de n «suficientemente grande».

Ahora bien, aunque esta idea es correcta, resulta muy poco eficiente, ya que para obtener una gran cantidad de dígitos es necesario trabajar con valores de n verdaderamente enormes. Por ejemplo, cuando $n = 1.000.000$ obtenemos $\left(1+\frac{1}{1.000.000}\right)^{1.000.000} = 2{,}7182804...$, es decir, apenas se consiguen cinco cifras decimales de *e* (recuérdese que $e = 2{,}7182818...$), mientras que si $n = 1.000.000.000$ sólo se ganan tres dígitos más.

De modo que para obtener buenas aproximaciones más rápidas de *e* es indispensable usar fórmulas alternativas. El primero en hallar una de estas fórmulas fue, como no podía ser de otra manera, Leonhard Euler, quien la publicó en su *Introductio in Analysin infinitorum*. Una fórmula cuyo contenido está vinculado a dos conceptos matemáticos: los factoriales y las series.

¿Qué es la función factorial?

Imaginemos que tres jóvenes llamados Alejo (A), Bruno (B) y Carolina (C) desean hacerse varias fotografías colocados en fila, uno al lado del otro. Queremos saber cuántas fotografías diferentes pueden llegar a realizarse, teniendo en cuenta que sólo nos interesa el orden en que los tres jóvenes estarán situados, obviando cualquier otra circunstancia.

Esta figura nos muestra la respuesta: los tres chicos pueden hacerse seis fotografías distintas; en una de ellas Alejo está a la izquierda, Bruno en el centro y Carolina a la derecha, en otra, Alejo está a la izquierda, Carolina está en el centro y Bruno a la derecha, y así sucesivamente, hasta completar todas las posibilidades.

ABC	ACB	CAB
BAC	BCA	CBA

Las seis fotografías diferentes que pueden hacerse tres personas.
A = Alejo, B = Bruno, C = Carolina.

Imaginemos ahora que otra joven, digamos Diana (D), se incorpora al grupo y que, una vez más, todos quieren hacerse fotografías ubicados en una línea ¿cuántas fotografías diferentes pueden tomarse ahora? Una forma de hallar una respuesta sería, como hicimos antes, contar una por una todas las fotografías posibles. Sin embargo, tal y como se puede ver a continuación, existe una manera más simple de proceder, basada en la resolución del caso anterior.

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA

Fotografías posibles con 3 personas

ABCD	ACBD	BACD	BCAD	CABD	CBAD
ABDC	ACDB	BADC	BCDA	CADB	CBDA
ADBC	ADCB	BDAC	BDCA	CDAB	CDBA
DABC	DACB	DBAC	DBCA	DCAB	DCBA

Fotografías posibles con 4 personas

Las 24 fotografías diferentes que pueden hacerse cuatro personas.
A = Alejo, B = Bruno, C = Carolina, D = Diana.

Para ello tomamos cada una de las seis fotografías de Alejo, Bruno y Carolina, y vemos cuántas fotografías nuevas se generan al añadirse Diana. La fotografía ABC produce cuatro fotografías nuevas: en una de ellas Diana se agrega a la derecha (y obtenemos ABCD), en otra, Diana se incorpora entre Bruno y Carolina (ABDC), en la siguiente lo hace entre Alejo y Bruno, y en la última se coloca a la izquierda (ADBC y DABC respectivamente). Este mismo razonamiento nos dice que *cada* una de las seis fotografías del caso anterior origina cuatro nuevas; por lo tanto, la cantidad total de fotografías que pueden hacerse Alejo, Bruno, Carolina y Diana es $6 \cdot 4 = 24$.

De manera similar, en el caso de que se agregara una quinta persona al grupo, digamos que Esteban (E), cada una de las 24 fotografías anteriores daría lugar a cinco nuevas; por ejemplo, ABCD produciría ABCDE, ABCED, ABECD, AEBCD y EABCD. En consecuencia, el total de fotografías para cinco personas es de $6 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

En realidad, podríamos haber aplicado desde el principio esta técnica basada en el caso inmediato anterior. Es decir que si Alejo está solo podría tomarse una única fotografía; si se agrega Bruno, éste puede colocarse a la derecha o a la izquierda de Alejo, por lo que la cantidad de fotografías aumenta a $1 \cdot 2 = 2$. Si ahora se les une Carolina, ella puede colocarse a la derecha, en el centro o a la izquierda de Alejo y Bruno, de modo que cada fotografía genera tres nuevas instantáneas y el total pasa a ser $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Para cuatro personas, pues, la cantidad de fotografías es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ y para cinco, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Resumiendo: si tenemos n objetos o personas, el número de formas diferentes en que estos pueden ser ubicados en línea o, como suele decirse, el número de formas distintas en que pueden ser *permutados*, se calcula como $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. O lo que es lo mismo, como el producto de todos los números enteros entre 1 y n. Para abreviar la escritura, este producto se indica $n!$ y se denomina «n factorial» o «factorial de n». De esta manera, por ejemplo:

$$1! = 1$$
$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$
$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$
$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5.040$$

Por lo tanto, si tuviéramos las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, y nos preguntáramos cuántos números pueden formarse usando exactamente una vez cada una de ellas, como es el caso de 213465 o 561243, la respuesta es $6! = 720$.

Por otra parte, resulta útil definir un valor para 0! Y dado que $\frac{4!}{3!} = 4$, $\frac{3!}{2!} = 3$ y $\frac{2!}{1!} = 2$, para continuar con la regularidad resulta conveniente que también valga que $\frac{1!}{0!} = 1$; para que esta última igualdad sea cierta debe ser $0! = 1$, lo cual es muy conveniente porque sólo hay una manera de hacer una foto con 0 personas.

CÓMO CALCULAR LA CANTIDAD DE CEROS CON LOS QUE TERMINA UN NÚMERO FACTORIAL

Existe una manera muy sencilla de saber con cuántos ceros termina la escritura de $n!$. Para hacerlo se calcula primero la parte entera de $\frac{n}{5}$ (es decir, se hace esa división y en el resultado se descartan los dígitos ubicados detrás de la coma), luego se calcula la parte entera de $\frac{n}{5^2}$, $\frac{n}{5^3}$, ... y así sucesivamente hasta que la parte entera sea igual a cero; finalmente, se suman todos los números obtenidos. Este último resultado es la cantidad de ceros con que termina $n!$.

A modo de ejemplo, digamos que $n=35$; la parte entera de $\frac{35}{5}$ es 7, la parte entera de $\frac{35}{25}$ es 1, y de ahí en adelante todas las demás dan 0. Esto significa que 35! termina con $7+1=8$ ceros. En efecto:

$$35! = 1.033.314.766.386.144.929.666.651.337.523.200.000.000.$$

Una característica distintiva de los factoriales es que crecen muy rápidamente; por ejemplo, 5!, como ya vimos, es 120, mientras que 10! vale 3.628.800, 20! es un número de 19 cifras, 30! alcanza los 33 dígitos y 70! llega a las 101 cifras. Imaginen lo engorroso que debía ser el cálculo de factoriales antes de la invención de las calculadoras electrónicas. Por suerte, en 1730 el matemático inglés James Stirling (1692-1770) publicó la fórmula que hoy lleva su nombre y que permite obtener, de manera relativamente sencilla, una muy buena aproximación de *n*!. Concretamente, la fórmula de Stirling dice que:

$$n! \text{ vale aproximadamente } \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Como se ve, en ella no solamente interviene el número *e*, sino que también aparece el no menos famoso número π. ¿Cómo de buena es la aproximación que da la fórmula de Stirling? A modo de muestra, la siguiente tabla compara, para algunos valores pequeños de *n*, el resultado exacto de *n*! con el cálculo aproximado que resulta de aplicar la fórmula de Stirling (redondeado a dos decimales).

n	*n*!	Aproximación que da la fórmula	Porcentaje
2	2	1,92	96%
3	6	5,84	97,33%
5	120	118,02	98,35%
10	3.628.800	3.598.695,62	99,17%
12	479.001.600	475.687.486,47	99,31%
14	87.178.291.200	86.661.001.740,60	99,41%
16	20.922.789.888.000	20.814.114.415.223,14	99,48%

La tercera columna indica el porcentaje de aproximación en comparación con el valor exacto de *n*! (1,92 es, por ejemplo, el 96% de 2). Tal como sugiere la tabla, puede demostrarse rigurosamente que a medida que *n* crece ese porcentaje se acerca cada vez más al 100%, aunque nunca lo alcanza realmente. Es decir, la fórmula de Stirling da una aproximación que, en el sentido del porcentaje, es mejor cuanto mayor sea el valor de *n*.

El matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920) halló una fórmula que da aproximaciones del factorial mucho más exactas que las de la fórmula de Stirling. La fórmula de Ramanujan dice que:

$$n! \text{ vale aproximadamente } \sqrt{\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt[6]{8n^3+4n^2+n+\frac{1}{30}}.$$

A modo de comparación, respecto a 5! = 120, la fórmula de Stirling da como aproximación el valor 118,02. En cambio, la fórmula de Ramanujan da 120,000738.

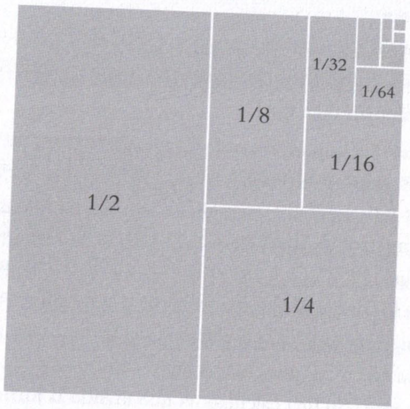
La invención de los ordenadores electrónicos y la difusión masiva de las calculadoras portátiles han provocado que la fórmula de Stirling haya perdido parte de su utilidad original. En efecto, si quisiéramos saber cuánto vale 25! es mucho más fácil obtenerlo directamente con una calculadora que usando la fórmula aproximada. Sin embargo, la fórmula de Stirling todavía sigue siendo muy útil en varias ramas de las matemáticas o de la física en las que es necesario trabajar con factoriales de números enormemente grandes. En mecánica estadística, por ejemplo, aparecen ecuaciones en las que a veces aparece el factorial de la cantidad de partículas de un sistema físico, cantidad que puede ser del orden de 10^{25} (un uno seguido de 25 ceros). Los factoriales de ese orden sólo pueden ser manejados con la fórmula de Stirling.

No deja de ser un poco paradójico que dicha fórmula use el número *e* para calcular una aproximación de los factoriales y que, por otro lado, como veremos más adelante, sean esos mismos factoriales los que nos dan una manera eficiente de calcular buenas aproximaciones del número *e*. Es decir, el número *e* «calcula» los factoriales, los cuales a su vez, calculan a *e*.

Las series: sumando números hasta el infinito

No es necesario explicar cómo se suma una cantidad finita de números, como es el caso, por ejemplo, de los cálculos $2+4+\frac{3}{7}$, o de $76+\frac{22}{17}+(-12)+45$. Resolver una suma con varios miles de sumandos es sin duda muy trabajoso, pero su dificultad es meramente práctica y está exenta de complejidades teóricas específicas. Pero ¿qué sucedería si quisiéramos calcular la suma de una cantidad *infinita* de números?

Podría pensarse, *a priori*, que una suma de esas características debería dar como resultado un valor infinito, pero no siempre es así. Por ejemplo, en la figura siguiente vemos un cuadrado de lado 1 que ha sido dividido infinitas veces. Primero ha sido partido por la mitad, luego una de esas mitades ha sido cortada en dos, y así sucesivamente.



Demostración gráfica de que 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 +... = 1.

En la imagen, dentro de cada parte se ha anotado su área; dado que el área total vale 1 tenemos entonces que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=1$.

En lenguaje matemático la suma de una cantidad infinita de números se denomina *serie*. Cuando, como en el caso del ejemplo anterior, el resultado de la suma es un número (es decir, cuando el resultado es finito), se dice que la serie es *convergente*. Pero existen series que dan, efectivamente, un resultado infinito; esto sucede, por ejemplo, con $1+2+3+4+5+\ldots$ El resultado infinito de esta suma se escribe así: $1+2+3+4+5+\ldots=\infty$ y en este caso suele decirse que la serie es *divergente*.

Ahora bien, una serie implica siempre un proceso de aproximaciones sucesivas; esto quiere decir que cuando afirmamos que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=1$ en realidad estamos diciendo que si calculamos sucesivamente...

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=0{,}75$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=0{,}875$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=0{,}9375$$
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=0{,}96875\,.$$

...los resultados obtenidos se irán acercando cada vez más a 1. En el mismo sentido, el hecho de que $1+2+3+4+5+\ldots=\infty$ significa que si calculamos...

$$1+2=3$$
$$1+2+3=6$$
$$1+2+3+4=10.$$

...los resultados se harán tan grandes como uno quiera.

Estos conceptos nos interesan porque en 1748 Euler demostró que el número *e* puede calcularse como la suma de una serie, o que, más exactamente, *e* es la suma de los inversos de todos los factoriales, lo que en símbolos matemáticos se expresa así:

$$e=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\frac{1}{10!}+\cdots$$

Esto significa que si calculamos sucesivamente $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}$, $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$,... obtendremos aproximaciones del número *e* que serán cada vez mejores. Además, con esta formulación nos acercaremos al valor exacto de *e* mucho más rápidamente que con las aproximaciones que se obtienen de la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Como ya hemos visto, si usamos esta última expresión para obtener cinco dígitos decimales exactos de *e* debemos usar valores de *n* del orden de un millón; usando la serie, en cambio, se obtienen seis dígitos decimales exactos sumando simplemente hasta $\frac{1}{9!}$. En efecto, la suma desde $\frac{1}{0!}$ hasta $\frac{1}{9!}$ da como resultado **2,718281**525573... (en negrita se destacan los dígitos que coinciden con el valor exacto de *e*). De hecho, hoy en día los ordenadores permiten comprobar con bastante facilidad que sumando los primeros 120 términos de la serie se obtienen 200 cifras decimales exactas. A modo de ejemplo, la siguiente tabla muestra el resultado de las primeras sumas parciales, donde también se han resaltado en negrita los dígitos que coinciden con el valor exacto de *e*:

Sumas parciales	Resultado de la suma
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}$	**2**
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}$	**2**,5
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$	**2**,6666666667
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$	**2,7**083333333
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$	**2,71**66666667
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}$	**2,718**0555556
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}$	**2,7182**539683
$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}$	**2,7182**787698

Fue este enunciado el que usaron Euler, Shanks y Boorman para hallar dígitos de *e*. Pero esta fórmula en serie puede extenderse también a las potencias de *e* (de las que ya hablamos en el capítulo anterior, cuando pusimos el ejemplo del cálculo del interés compuesto). Concretamente, Euler demostró que, siendo x un número cualquiera:

$$e^x=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

(En los primeros dos términos hemos omitido los números $0!=1$ y $1!=1$, porque habitualmente no se escriben). Cuando $x=1$ obtenemos la misma escritura de *e* que mostramos antes, ya que $1^n=1$ sea cual sea el exponente. Volviendo al ejemplo anterior, para $x=0,2$ la expresión que nos da es:

$$e^{0,2}=\frac{0,2^0}{0!}+\frac{0,2^1}{1!}+\frac{0,2^2}{2!}+\frac{0,2^3}{3!}+\frac{0,2^4}{4!}+\frac{0,2^5}{5!}+\frac{0,2^6}{6!}+\frac{0,2^7}{7!}+\cdots$$

Un ejemplo interesante aparece al tomar $x=-1$. En efecto, por una parte, tenemos que:

$$e^{-1}=\frac{(-1)^0}{0!}+\frac{(-1)^1}{1!}+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\frac{(-1)^4}{4!}+\frac{(-1)^5}{5!}+\frac{(-1)^6}{6!}+\frac{(-1)^7}{7!}+\cdots$$

Pero observemos que si *n* es par entonces $(-1)^n=1$, mientras que si *n* es impar entonces $(-1)^n=-1$. Además sucede que $e^{-1}=\frac{1}{e}$. Tenemos así que la serie anterior se transforma en: $\frac{1}{e}=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\cdots$

Que lleva a la curiosa igualdad:

$$\frac{e}{0!}-\frac{e}{1!}+\frac{e}{2!}-\frac{e}{3!}+\frac{e}{4!}-\frac{e}{5!}+\frac{e}{6!}-\frac{e}{7!}+\cdots=1.$$

La fórmula de Euler: las matemáticas son bellas

En su libro de 1748, además de estudiar la escritura del número *e* en forma de serie, Euler planteó una fórmula que, al igual que la de Stirling, involucra simultáneamente a los números *e* y π. Se trata de la célebre fórmula de Euler que ha llegado a hacerse tan famosa que hoy es objeto de *merchandising* y la podemos encontrar estampada en camisetas, tazas y en otros muchos objetos. ¿Sabían que en 1988, los lectores de la revista *Mathematical Intelligencer* la votaron como la fórmula matemática más bella de la historia?

La fórmula dice que: $e^{i\pi}+1=0$.

Pero ¿qué significa exactamente esa igualdad? ¿Qué es lo que nos quiere decir? Vayamos por pasos: primero abordaremos el significado del símbolo i que aparece en esta expresión.

Los números que usamos habitualmente y, de hecho, todos los que hemos mencionado en este libro hasta el momento, están dentro de los llamados *números reales*, que son los que incluyen a los enteros positivos y negativos, tales como 0, 1, 2, 3, 4, –1, –2, –3,… y también a las fracciones, como $\frac{2}{7}, -\frac{1}{9}, \frac{24}{11}$; expresiones decimales como 0,25 y 0,233333…, a números como $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{7}$, así como a los ya mencionados e y π.

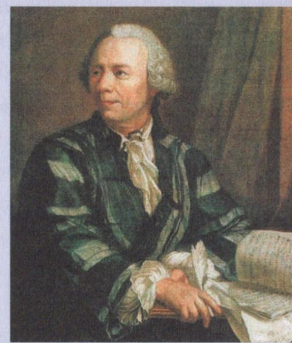
Desde la Antigüedad y hasta principios del siglo XVI los números reales fueron suficientes para satisfacer todas las necesidades matemáticas de la humanidad, ya fueran las de índole práctica, como las relacionadas con el comercio, el calendario o la arquitectura, o las más teóricas, vinculadas a las investigaciones científicas. Sin embargo, hacia 1530 esa situación comenzó a cambiar completamente. En esos años los matemáticos italianos Niccolò Fontana (1500-1557) —más conocido como Tartaglia debido a su tartamudez— y Girolamo Cardano (1501-1576), descubrieron la fórmula que permite resolver las llamadas *ecuaciones cúbicas*, que son aquellas, como por ejemplo $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$, en las que la incógnita x aparece elevada, como máximo, a la tercera potencia. Ocurrió que Cardano y Tartaglia se dieron cuenta de que a veces el proceso de resolución de una ecuación les exigía calcular la raíz cuadrada de un número negativo, como es el caso de la raíz cuadrada de –1. El punto crucial es que ese cálculo, $\sqrt{-1}$, no tiene solución dentro de los números reales. En efecto, cuando nos planteamos hallar, por ejemplo, la raíz cuadrada de 9, estamos buscando un número (que por convención es positivo) que elevado al cuadrado sea igual a 9; y dado que $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$, decimos entonces que $\sqrt{9} = 3$. Siguiendo la misma idea, calcular $\sqrt{-1}$ consistiría en hallar un número que elevado al cuadrado fuera igual a –1, pero esto es imposible porque al elevar un número real al cuadrado jamás se obtiene un resultado negativo, ya que $1^2 = 1$ y también $(-1)^2 = 1$.

Para Tartaglia y Cardano números como $\sqrt{-1}$ o $\sqrt{-2}$ eran números inexistentes, y los llamaron números *imaginarios* por contraposición a los números *reales*. Tartaglia y Cardano los consideraron meras «ficciones útiles» que aparecían en algunos pasos intermedios de sus cálculos para después «desaparecer» en el resultado final. Un ejemplo: pongamos que la fórmula les exigiera calcular $3 + \sqrt{-2}$ y $3 - \sqrt{-2}$ y que, luego, esos dos números tuvieran que ser multiplicados entre sí. Como se aprecia en el resultado: $(3 + \sqrt{-2})(3 - \sqrt{-2}) = 11$, aquí el «incómodo» número imaginario $\sqrt{-2}$ ya no aparece.

Pero con el paso del tiempo los matemáticos apreciaron cada vez más la utilidad de estos números imaginarios. A finales del siglo XVII y principios del XVIII tanto Leibniz como los hermanos Bernoulli los usaron en diversos tipos de cálculos, y es por eso que, a mediados del siglo XVIII, se empezó a aceptar de forma gradual que esos números, «existían de verdad».

Leonard Euler fue el primer matemático que trabajó sistemáticamente con los números imaginarios. Se dedicó a estudiar sus propiedades, analizó fórmulas que los involucran e incluso introdujo la letra i que aparece en la expresión $e^{i\pi} + 1 = 0$ para referirse, tal como todavía se hace actualmente, a la raíz cuadrada de –1. En otras palabras, Euler fue el primero en decir que $i = \sqrt{-1}$.

LEONHARD EULER (1707-1783), EL MATEMÁTICO MÁS PROLÍFICO



Leonhard Euler nació en Basilea, Suiza, el 15 de abril de 1707 y falleció en San Petersburgo, Rusia, el 18 de septiembre de 1783. Considerado el matemático más eminente del siglo XVIII y uno de los más importantes de todos los tiempos es, aún hoy, el autor que más estudios de matemáticas ha publicado. Casi nadie, en ninguna de las áreas de la ciencia, ha superado la cantidad de artículos que Euler produjo y 50 años después de su muerte, todavía no se había completado la edición de sus artículos póstumos. Sin duda hizo aportes fundamentales no sólo a las matemáticas, sino también a la física y la astronomía. Es difícil encontrar un tema en estas disciplinas en el que no aparezca alguna *fórmula de Euler*, *constante de Euler*, *función de Euler* o *ecuación de Euler*.

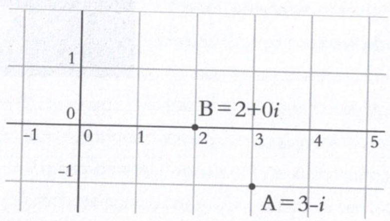
Y es que tenía tal capacidad de trabajo que, incluso cuando siendo mayor se quedó completamente ciego (de joven había perdido la vista de su ojo derecho por observar el Sol sin protección), Euler siguió adelante con sus cálculos. Dotado de una extraordinaria memoria, Euler se los dictaba a un asistente para que los anotara. La muerte le sobrevino cuando, durante un descanso, Euler jugaba con sus nietos. Sus últimas palabras, cuentan, fueron extraordinariamente precisas: «Me muero», dijo el matemático. Dos siglos después, en referencia a esa frase concluyente, el matemático húngaro Paul Erdös (tras Euler, el segundo matemático más prolífico de la historia), diría con admiración: «Así se comprobó la última conjetura de Euler». Sin duda, así fue.

Observemos que de la igualdad $i = \sqrt{-1}$ se deduce que, por ejemplo, $3 + \sqrt{-2}$ puede escribirse como: $3+\sqrt{-2} = 3+\sqrt{2(-1)} = 3+\sqrt{2}\sqrt{-1} = 3+\sqrt{2}i$. Ahora bien, números como $3+\sqrt{2}i$, $2-i$ o $7+9i$, que tienen una «parte real» y una «parte imaginaria», se llaman actualmente *números complejos*, expresión que fue usada por primera vez por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en 1831. Estos números complejos *extienden* a los reales, es decir, contienen a los reales como casos particulares. En efecto, los números reales resultan ser exactamente aquellos números complejos cuya parte imaginaria vale 0; de esta forma, por ejemplo, el número real 2 puede verse como el número complejo $2+0i$.

Así, gracias al desarrollo de las matemáticas, los números complejos evolucionaron desde un estadio inicial en los que fueron considerados meras «ficciones útiles» (condenadas a «desaparecer» antes de finalizar el cálculo), hasta convertirse en una familia de números que contiene a los reales como casos particulares.

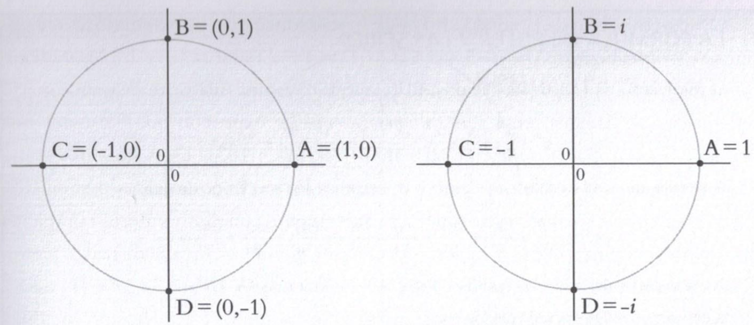
Para continuar con la explicación de la fórmula de Euler es importante resaltar que una propiedad esencial de los números complejos consiste en que pueden ser vistos gráficamente como puntos del plano.

Ya sabemos que cada punto del plano se describe usando dos coordenadas. Ahora bien, sucede que el número complejo $a+bi$ puede identificarse en el punto de coordenadas (a,b); el número $5+2i$, por ejemplo, se identifica con el punto de coordenadas (5,2). A continuación, la figura nos muestra la representación gráfica de los números complejos $3-i$ y $2+0i$.



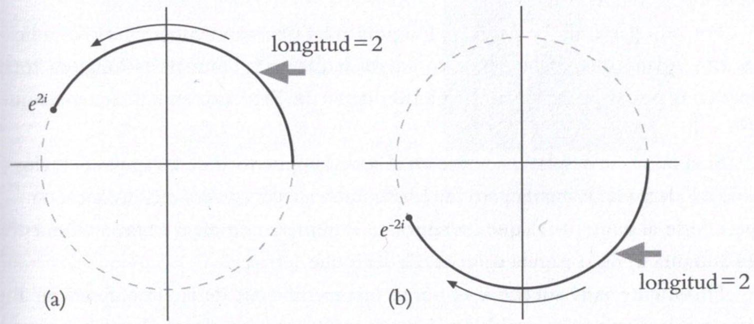
Representación gráfica de los números complejos 3 – i y 2 + 0i.

Pensemos ahora en la circunferencia que está centrada en el punto (0,0) y cuyo radio mide 1, como se puede ver en la siguiente figura; esta circunferencia, obviamente, está formada por puntos del plano, pero como hemos dicho que esos puntos representan números complejos, también es correcto imaginar que la circunferencia está formada por números complejos. Por ejemplo, los números complejos $i=0+1i$, $1=1+0i$, $-i=0-1i$ y $-1=-1+0i$ forman parte de ella.



En la imagen se ve la circunferencia centrada en el (0,0) y de radio 1; se muestran también algunos de los números complejos que la forman.

De nuevo fue Euler quien, en 1748, demostró que si t es un número real (ya sea, 1, –3, $\frac{3}{5}$, $\sqrt{2}$, π, o cualquier otro) entonces e^{it} es siempre uno de los números complejos que forman parte de esa circunferencia. Imaginemos que un punto inicialmente ubicado en la posición (1,0) comienza a desplazarse a lo largo de la circunferencia en el sentido opuesto al de las agujas del reloj. Euler demostró que cuando ese punto ha recorrido una distancia igual a t (suponemos que t es positivo) entonces habrá llegado exactamente al punto que corresponde al número complejo e^{it} (véase el círculo de la izquierda en la figura siguiente). Si t es negativo la conclusión es similar, sólo que el movimiento se realiza en el sentido de las agujas del reloj, como se aprecia en el gráfico:



En la figura vemos un punto que recorre sobre la circunferencia una longitud igual a 2, ya sea en sentido horario o antihorario.

LA FÓRMULA DE EULER Y LAS SERIES

La fórmula $e^{\pi i}=-1$ puede ser interpretada trabajando con series. Para ello recordemos que:

$$e^x=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Si en esta igualdad establecemos que $x=i\pi$, llegamos a la conclusión de que:

$$e^{i\pi}=\frac{(i\pi)^0}{0!}+\frac{(i\pi)^1}{1!}+\frac{(i\pi)^2}{2!}+\frac{(i\pi)^3}{3!}+\frac{(i\pi)^4}{4!}+\frac{(i\pi)^5}{5!}+\frac{(i\pi)^6}{6!}+\frac{(i\pi)^7}{7!}+\cdots$$

Por otra parte, del hecho de que $i^2=-1$ se puede deducir que $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, $i^6=-1$ y así sucesivamente. De esto se concluye que:

$$e^{i\pi}=\left(\frac{\pi^0}{0!}-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+\cdots\right)+i\left(\frac{\pi^1}{1!}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\cdots\right).$$

Finalmente, puede probarse que $\frac{\pi^0}{0!}-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+\cdots=-1$ y que $\frac{\pi^1}{1!}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\frac{\pi^7}{7!}+\cdots=0$, de donde se deduce que $e^{\pi i}=-1$.

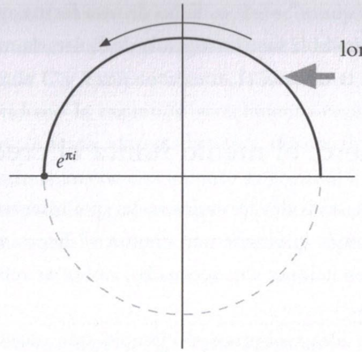
En consecuencia, si $t=0$ la distancia recorrida por el punto es cero, lo que significa que el punto no ha llegado a salir de la posición inicial (1,0), por lo que $e^{i0}=1+0i=1$, lo cual es totalmente coherente con el hecho de que $e^{i0}=e^0=1$ (cualquier número elevado a 0 es igual a 1).

¿Qué sucede si el punto móvil recorre la circunferencia completa? Una primera respuesta, por supuesto, es que volverá a la posición inicial (1,0), que corresponde al número complejo $1+0i=1$.

Por otra parte, sin embargo, la longitud total de una circunferencia de radio r es $2\pi r$, y dado que en nuestro caso en particular $r=1$, entonces la longitud total recorrida por el punto móvil habrá sido de $t=2\pi$. Tenemos en consecuencia que $e^{2\pi i}=1$.

Si el punto se desplaza, siempre en el sentido opuesto al de las agujas del reloj y sólo a lo largo de la cuarta parte de la circunferencia, recorrerá una distancia de $\frac{\pi}{2}$ para llegar al punto (0,1), que corresponde al número complejo i, como se muestra en la figura b) de la página anterior. Es decir que $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$.

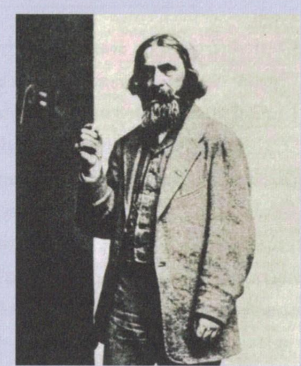
Finalmente ¿qué sucede si el punto recorre la *mitad* de la circunferencia? En ese caso, la distancia recorrida será igual a π y la posición final, tal como se ve en la figura siguiente, será el punto $(-1,0)$, que corresponde al número complejo $-1+0i=-1$.



Si el punto recorre una longitud igual a π llega a la posición (-1,0) que corresponde al número complejo -1.

UNA FOTOGRAFÍA MATEMÁTICA

En 1864, el matemático estadounidense Benjamin Peirce (1809-1880) se fotografió ante una pizarra en la que había escrito la fórmula $i^i=\sqrt{e^{-\pi}}$, que resulta de la igualdad $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$ mostrada en el texto. Refiriéndose a la fórmula $i^i=\sqrt{e^{-\pi}}$ Peirce dijo a sus alumnos: «Esto es absolutamente paradójico y no sabemos qué significa, pero lo hemos probado y, por lo tanto, sabemos que es verdadero».



Para realizar la deducción, se elevan a la potencia i ambos miembros de la igualdad y obtenemos que

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i=i^i.$$

Finalmente, aplicamos algunas de las propiedades de la potenciación y el hecho de que $i^2=-1$, y podremos concluir que:

$$i^i=\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^i=e^{\frac{\pi}{2}i\cdot i}=e^{\frac{\pi}{2}i^2}=e^{-\frac{\pi}{2}}=\left(e^{-\pi}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e^{-\pi}}.$$

(En el desarrollo hemos usado que $(a^b)^c=a^{bc}$ y que elevar a la $\frac{1}{2}$ equivale a usar la raíz cuadrada.)

Tenemos entonces que $e^{\pi i} = -1$ o, dicho de otra forma, que $e^{i\pi} + 1 = 0$. De esta manera hemos demostrado la famosa fórmula de Euler, «la más bella de la historia de las matemáticas».

Bacterias y dinero: el medio limita el crecimiento

Vamos a analizar ahora otras dos fórmulas en las que interviene el número e. Para comenzar, preguntémonos qué tienen en común el dinero y las bacterias. La respuesta es que, si las condiciones son adecuadas, ambos se reproducen siguiendo la misma ley matemática.

Para entender esta idea, volvamos al ejemplo que estudiamos en el capítulo anterior, en el que un capital C es depositado en el banco a un 20% de interés compuesto anual con capitalización continua. Ya sabemos que al cabo de un año el capital inicial C se habrá multiplicado por $e^{0,2}$, es decir que el capital acumulado al cabo de un año será $Ce^{0,2}$. Ahora bien ¿cuál será el capital acumulado después de dos años? En ese caso habría que multiplicar otra vez por $e^{0,2}$ y, en consecuencia, el capital será $Ce^{0,2}e^{0,2} = C(e^{0,2})^2$. Así, tenemos que:

Capital al cabo de 1 año $= Ce^{0,2}$.
Capital al cabo de 2 años $= Ce^{0,2}e^{0,2} = C(e^{0,2})^2 = Ce^{0,2\cdot 2}$.
Capital al cabo de 3 años $= Ce^{0,2}e^{0,2}e^{0,2} = C(e^{0,2})^3 = Ce^{0,2\cdot 3}$.

(En los cálculos hemos usado la propiedad que dice que $(a^b)^c = a^{bc}$.)

Generalizando estos cálculos llegamos a la conclusión de que el capital acumulado al cabo de t años es $Ce^{0,2t}$. Es interesante observar que la misma fórmula vale también para cantidades no enteras de años; así, por ejemplo, el capital acumulado al cabo de seis meses, tiempo que equivale a medio año, será de

$$Ce^{0,2\frac{1}{2}}$$

y el capital acumulado después de cuatro meses, o un tercio de año, será de

$$Ce^{0,2\frac{1}{3}}.$$

Según la terminología introducida en el capítulo anterior, la fórmula Capital acumulado $= Ce^{0,2t}$ define una *función* que, como recordaremos es cualquier regla que a cada número le asigna, de manera clara y precisa, otro número. En este caso, la función que estamos considerando le asigna a cada número t, que representa la cantidad (entera, o no) de años transcurridos, el capital acumulado hasta ese momento. Cuando, como sucede en este caso, la asignación está definida mediante una fórmula del tipo Ce^{kt}, donde C y k son constantes, la función se denomina *exponencial*.

En el lenguaje cotidiano la expresión «crecimiento exponencial» suele usarse para referirse a un crecimiento extremadamente rápido. En efecto, cuando k es positivo (es decir, cuando la tasa de crecimiento es positiva) la función exponencial crece a una gran velocidad. Imaginemos que el capital inicial es de 10 euros. En la siguiente tabla se muestran los valores que alcanza el capital acumulado $10e^{0,2t}$ a medida que t crece.

Años transcurridos = t	Capital acumulado = $10e^{0,2t}$
1	12,21
5	27,18
10	73,89
15	200,86
20	545,98
25	1.484,13
30	4.034,29

Al cabo de treinta años el capital inicial se ha multiplicado por más de 400. Es verdad que puede parecer un lapso de tiempo muy largo, pero comparemos ahora ese ritmo de crecimiento con el de las poblaciones de bacterias. Cuando el espacio vital y el alimento son prácticamente ilimitados, una población de bacterias crece también, como el dinero, a una tasa constante. Por ello, como decíamos al principio de la sección, podríamos describir el número de bacterias mediante la misma función que el capital colocado a un interés compuesto. Esto quiere decir que si una cierta población de bacterias aumenta su número a una tasa constante de, pongamos, un 20% por hora, entonces al cabo de t horas habrá $Ce^{0,2t}$ bacterias, donde C representa la cantidad que había inicialmente.

Entonces, si una bacteria tiene una masa de una billonésima de gramo y, por tanto, una población inicial de unas pocas decenas de bacterias tiene una masa total más o menos similar, podemos deducir que la velocidad de crecimiento de la función exponencial seguiría esta secuencia: en menos de veinte días, esa pequeña población inicial de bacterias superará la masa total del planeta Tierra y un mes después su masa será más grande que la del supercúmulo de Virgo, una enorme agrupación de cúmulos de galaxias que incluye, entre muchos otros, al Grupo Local, el grupo de galaxias donde está nuestra Vía Láctea.

Por supuesto, afortunadamente para nosotros, ni el espacio vital ni el alimento disponible para las bacterias son ilimitados, así que jamás llegan a reproducirse hasta el punto de aplastarnos con su peso. A medida que la población aumenta, el alimento comienza a escasear, lo que limita y ralentiza el crecimiento del número de bacterias. Aunque inicialmente la población aumenta a una tasa constante del 20% por hora, el medio en el que las bacterias viven es capaz de sostener una población máxima de M individuos. Bajo esta hipótesis, la fórmula que calcula la cantidad de bacterias al cabo de t horas también involucra al número e. Concretamente, esa fórmula dice que:

$$\text{Cantidad de bacterias al cabo de } t \text{ horas} = \frac{CMe^{0,2t}}{M + C(e^{0,2t} - 1)}.$$

En esta fórmula, pues, M es la máxima población que el ambiente puede mantener y C es la cantidad inicial de bacterias. Conocida con el nombre de *función logística*, esta fórmula se usa en biología para estudiar poblaciones de diferentes especies. A partir de ella puede demostrarse matemáticamente que, a medida que el tiempo pasa, la población de bacterias alcanza ese valor M. La vida se abre camino hasta ocupar todos los espacios disponibles: si el espacio es ilimitado crece infinitamente pero si el valor máximo que puede alcanzar es M, entonces M es su techo poblacional.

El carbono-14 y el decrecimiento exponencial

Como ya hemos visto ejemplos de cantidades que crecen exponencialmente, ahora observaremos una cantidad que *decrece* siguiendo una función exponencial. El ejemplo al que nos referimos es el de la *desintegración radiactiva*. Los átomos de cualquier elemento radiactivo se desintegran progresivamente transformándose en átomos de una sustancia diferente, una verdadera transmutación como la que buscaban los alquimistas medievales. Por ejemplo, el radio se transforma en radón, un gas radiactivo presente en las capas más bajas de la atmósfera debido a la descomposición de diminutas cantidades de radio contenidas en el suelo. A su vez, el radón se transforma en polonio, que también es radiactivo, y éste se convierte en plomo, un elemento estable que no se desintegra.

$$\text{Radio} \rightarrow \text{Radón} \rightarrow \text{Polonio} \rightarrow \text{Plomo}$$

Mientras que en el ejemplo del dinero éste aumentaba a una tasa constante, la masa de cualquier sustancia radiactiva también disminuye a una tasa constante. En consecuencia, si tenemos cierta cantidad inicial C de una sustancia radiactiva S, la cantidad presente cuando ha pasado un intervalo t de tiempo se calcula mediante la fórmula Ce^{-kt}, donde k es una constante que depende de cada sustancia. (El signo menos que aparece en la fórmula indica que la tasa de variación es negativa, es decir, que la cantidad disminuye en lugar de aumentar).

Una característica de la descomposición radiactiva, y de cualquier otro decrecimiento exponencial, es que el lapso de tiempo que una masa inicial C tarda en reducirse a la mitad es siempre el mismo. Ese lapso, que es llamado la *semivida* del elemento, es independiente de cuál sea la masa inicial y sólo depende de la sustancia en cuestión. En el caso del radio, por ejemplo, su *semivida* es de 1.600 años; esto quiere decir que cualquier cantidad inicial de radio, al cabo de 1.600 años se habrá reducido a la mitad y que el resto del radio inicial se habrá convertido en otras sustancias, mayormente plomo.

Matemáticamente, conocer la semivida de un elemento radiactivo nos permite deducir el valor de k en la fórmula indicada más arriba. En efecto, supongamos que:

$$\text{Cantidad de radio presente después de } t \text{ años} = Ce^{-kt}.$$

Sabemos que cuando $t = 1.600$ la cantidad presente es $\frac{C}{2}$, ya que la masa inicial C se ha reducido a la mitad. Matemáticamente lo expresamos así:

$$\frac{C}{2} = Ce^{-k1600}.$$

De donde deducimos que:

$$\frac{1}{2} = e^{-k1600}.$$

Recordemos que, según vimos en el primer capítulo, si R, S y T son números reales entonces $R = S^T$ equivale a decir que $\log_S(R) = T$ (que se lee «logaritmo en base S de R es igual a T»). En la igualdad anterior tenemos que

$$R = \frac{1}{2}, \quad S = e \quad \text{y} \quad T = -k1.600.$$

Deducimos entonces que

$$\log_e\left(\frac{1}{2}\right) = -k1.600,$$

y como el logaritmo en base e es el llamado «logaritmo natural», escribimos:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k1.600\,,$$

considerando a su vez que $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ vale aproximadamente –0,6931 (redondeando a cuatro decimales) llegamos a que:

$$-0{,}6931 = -k1.600,$$

de donde concluimos que k vale aproximadamente 0,0004332; la fórmula para calcular la cantidad de radio presente después de t años es:

Cantidad de radio presente después de t años $= Ce^{-0{,}0004332t}$.

Esa desintegración radioactiva progresiva resulta muy útil en campos como la arqueología o la paleontología, concretamente a través de lo que se conoce como la datación por carbono-14, también llamado C-14 o radiocarbono. Esta técnica fue desarrollada por el químico Willard Libby a finales de la década de 1940, quien en 1960 ganó el Premio Nobel de Química «por el desarrollo del método carbono-14 para el análisis temporal».

El carbono-14 es una variedad radiactiva del carbono que está presente en pequeñas cantidades en la atmósfera y que es absorbida por los seres vivos a través de la respiración. Por ello todas las especies de plantas y animales contienen en sus cuerpos, mientras están vivas, la misma cantidad constante de carbono-14.

Pero cuando la respiración se detiene el cuerpo deja de absorber C-14 y, como consecuencia de la desintegración radiactiva, la cantidad presente de esa sustancia en las distintas partes del cuerpo comienza a decrecer. Como la semivida del carbono-14 es de 5.730 años, la cantidad presente de esta sustancia en un fósil permite datar con bastante precisión el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo en cuestión. ¿Cómo se logra esto? Comencemos por esta fórmula:

Cantidad de radiocarbono presente t *años después de la muerte* = Ce^{-kt}.

Dado que la semivida es de 5.730 años, un razonamiento similar al que hemos hecho para el radio nos permite hallar el valor de k, que para el carbono-14 es de:

$$-0{,}6931 = -k5.730$$
$$k = 0{,}000121$$

Entonces:

Cantidad de radiocarbono presente t años después de la muerte $= Ce^{-0{,}000121t}$.

Supongamos que se ha encontrado el hueso fosilizado de un animal prehistórico y que en él la cantidad inicial de radiocarbono (que, como dijimos, es la misma en todos los seres vivos) se ha reducido a un 5%. Si t es el tiempo transcurrido desde la muerte del animal hasta la actualidad tenemos que:

$$0{,}05C = Ce^{-0{,}000121t}$$
$$0{,}05 = e^{-0{,}000121t}$$
$$\ln(0{,}05) = -0{,}000121t$$

Y dado que ln(0,05) vale aproximadamente –3 concluiremos que:

$$-3 = -0{,}000121t$$
$$t = 24.793 \text{ años}$$

Por tanto, sabremos que el animal ha muerto hace poco menos de 25.000 años.

En conclusión: en este capítulo hemos visto que, además de intervenir en el cálculo de intereses bancarios, el número e aparece también en la descripción del movimiento circular, en el cálculo del crecimiento de poblaciones, en la descripción matemática de la desintegración radiactiva y en la datación de fósiles por radiocarbono. A continuación, veremos cómo el número e aparece también en el cálculo de probabilidades.

Capítulo 3

El número *e* y las probabilidades

La probabilidad y la estadística son dos ramas de las matemáticas muy presentes en la vida cotidiana. Resultan de gran utilidad, entre otras cosas, para calcular cuán fácil o difícil es que te toque la lotería o para saber cuánto aumentaron de precio los teléfonos móviles durante el último año.

A continuación veremos tres situaciones en las que la probabilidad y la estadística aparecen vinculadas al número *e*. En la primera, se plantea un problema muy específico que llamaremos el «problema de los sombreros». Las otras dos, en cambio, son situaciones de aplicación mucho más general que abarcan, entre otras cuestiones, la cantidad de partículas radiactivas emitidas durante un período específico de tiempo, los errores de medición que se producen en las observaciones astronómicas e incluso el peso de los productos enlatados que se compran habitualmente en el supermercado.

El problema de los sombreros

Imaginemos que tres hombres cuyas iniciales son A, B y C, van a comer al mismo restaurante y que, al entrar, dejan sus sombreros colgados en el mismo perchero. Imaginemos también que los tres sombreros son muy parecidos. Tanto, que al marcharse ninguno de ellos puede distinguir claramente cuál es el suyo. Después de mucho discutir y comparar deciden que cada uno, simplemente, elija al azar uno de los sombreros; primero elige A, luego B y finalmente C. ¿Cuál es la probabilidad de que *nadie* se lleve su propio sombrero?

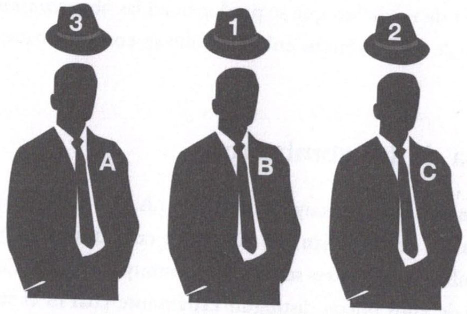
Para averiguarlo dividiremos la cantidad total de distribuciones en las que nadie se lleva su sombrero entre la cantidad total de maneras en que pueden distribuirse los tres sombreros.

$$\begin{array}{c}\text{Probabilidad de que nadie se} \\ \text{lleve su propio sombrero}\end{array} = \frac{\text{Distribuciones en las que nadie se lleva su sombrero}}{\text{Cantidad total de distribuciones posibles}}.$$

Para ello, estableceremos por un lado de cuántas formas diferentes pueden distribuirse los tres sombreros y por el otro, calcularemos en cuántas de esas distribuciones nadie se queda con el que le pertenece.

¿De cuántas formas diferentes pueden distribuirse los tres sombreros? Una posibilidad es que, debido a una afortunada casualidad, cada uno se lleve el suyo propio; otra sería que A se lleve el de B, B el de A, y C el suyo. O que A se lleve el de B, éste el de C y C el de A, y así sucesivamente.

Para facilitar el cálculo numeraremos los sombreros; llamaremos 1 al sombrero de A, 2 al de B y 3 al de C. Así, cada distribución de los sombreros quedará indicada por una secuencia de tres números: primero anotaremos el sombrero que se llevó A, luego el que se llevó B y en tercer lugar el que se llevó C. En el caso de que cada uno se lleve su sombrero, indicaremos 123. Si A se lleva el de B, B el de A, y C el que le pertenece, la secuencia será 213 y así continuadamente, tal y como se aprecia en la figura. En consecuencia, hay tantas maneras de distribuir los sombreros como formas de permutar las cifras 1, 2 y 3; en otras palabras, hay $3! = 6$ maneras diferentes de distribuir los tres sombreros.



En la imagen A se lleva el sombrero 3, B el 1 y C el 2. Indicamos esta distribución de sombreros como 312.

Este razonamiento, por supuesto, puede extenderse a cualquier número de personas. De esta forma, si los hombres hubiesen sido cuatro habría $4! = 24$ distribuciones posibles de sombreros; si hubiesen sido cinco, habría $5! = 120$ distribuciones; y así de forma sucesiva.

Pero volvamos ahora al caso de los tres hombres y busquemos cuántas distribuciones hay en las que *nadie* se lleva su propio sombrero. Una manera simple de

averiguarlo consiste en revisar una por una las seis permutaciones de los números 1, 2 y 3, y quedarnos sólo con aquellas que cumplen la condición indicada:

123 → Se descarta porque A, B y C se llevan su sombrero.
132 → Se descarta porque A se lleva su sombrero.
213 → Se descarta porque C se lleva su sombrero.
231 → Cumple la condición.
312 → Cumple la condición.
321 → Se descarta porque B se lleva su sombrero.

De las seis distribuciones de sombreros nos quedamos con aquellas en las que nadie se lleva el suyo.

La conclusión es que hay exactamente dos distribuciones en las que nadie se lleva su sombrero: 231 y 312. Por lo tanto, en este caso la probabilidad de que nadie acierte a llevarse el suyo es $\frac{2}{3!} = \frac{2}{6} = 0{,}333...$

El subfactorial de n

Sabemos que cada distribución de tres sombreros en la que nadie se lleva el suyo está indicada por una permutación de los números 1, 2, 3 en la que ninguno de ellos ocupa su lugar original, por ejemplo, 312. La cantidad total de esas permutaciones se indica como $!3$. Tenemos así que $!1 = 0$ (porque si hay un solo sombrero, es imposible que su dueño no se lo lleve), $!2 = 1$ y $!3 = 2$.

El símbolo $!n$ se lee «subfactorial de n» y cumple la siguiente relación:

$$!n = (n-1)(!(n-1) + !(n-2)).$$

De este modo, por ejemplo:

$$!4 = (4-1)(!(4-1) + !(4-2)) = 3(!3 + !2) = 3(2+1) = 9.$$

Esta relación hace que sea coherente definir $!0$ como 1. La deducción es así: $1 = !2 = 1(!1 + !0) = 1(0 + !0)$, luego $1 = !0$.

Curiosamente, el factorial cumple también la misma relación; en efecto, puede comprobarse que:

$$n! = (n-1)((n-1)! + (n-2)!).$$

¿Cuál es la probabilidad si hay cuatro personas? Dijimos antes que el número total de distribuciones es, en este caso, $4! = 24$. Por otra parte, si inspeccionamos las permutaciones una por una y descartamos aquellas en las que alguien se lleva su propio sombrero, resulta que quedan sólo nueve distribuciones en las que nadie se lo lleva: 2143, 2341, 2413, 3142, 3412, 3421, 4123, 4312 y 4321 (siguiendo la pauta anterior, los sombreros de A, B, C y D han sido numerados como 1, 2, 3 y 4 respectivamente). La probabilidad para el caso de cuatro hombres es, en consecuencia, $\frac{9}{24} = 0{,}375$.

Llegados a este punto surgen dos preguntas. Una cuestiona si la única manera de calcular los casos en los que nadie se lleva su propio sombrero es descartar uno por uno aquellos que no cumplen esa condición. Y la otra plantea lo siguiente: ¿qué tiene que ver el número *e* en todo esto?

El principio de inclusión-exclusión y las aproximaciones sucesivas

Volvamos a la situación en la que hay cuatro personas, A, B, C y D, y sus cuatro sombreros 1, 2, 3 y 4, y demos una respuesta «razonada» a la pregunta de cuántas son las distribuciones de los sombreros (o, lo que es lo mismo, las permutaciones de los cuatro números) en las que nadie se lleva el suyo. El procedimiento que vamos a aplicar se conoce como el *principio de inclusión-exclusión*, y fue desarrollado por primera vez por el matemático francés Abraham de Moivre. Como veremos enseguida, este método consiste en hallar la respuesta mediante aproximaciones sucesivas. Para facilitar las cosas, dividiremos el razonamiento en cuatro pasos.

Paso 1: Aunque sabemos que hay un total de 24 formas de distribuir los sombreros, nos interesan sólo aquellas en las que nadie se lleva el suyo propio. Para ello restaremos del total aquellas distribuciones en las que alguno de los cuatro sí se lleva el que le pertenece.

Distribuciones en las que nadie se lleva su sombrero =
Total de distribuciones – Distribuciones en las que alguien se lleva su sombrero.

¿En cuántas distribuciones sucede que A se lleva su propio sombrero? Observemos que estas distribuciones se corresponden con las permutaciones que comien-

zan con 1; o lo que es lo mismo, con aquellas de la forma $1xyz$ donde xyz es una permutación de las cifras 2, 3, 4. Para escribir las permutaciones que comienzan con 1 «fijamos» el 1 a la izquierda y permutamos las otras tres cifras:

$\underline{1}234$ $\underline{1}243$ $\underline{1}324$ $\underline{1}342$ $\underline{1}423$ $\underline{1}432$

Por tanto hay $3! = 6$ distribuciones en las que A se lleva su sombrero.

Para obtener las permutaciones en las que es B quien se lleva su sombrero, fijamos el 2 en el segundo lugar (indicando así que B se lleva el sombrero 2) y permutamos las otras tres cifras:

$1\underline{2}34$ $1\underline{2}43$ $3\underline{2}14$ $3\underline{2}41$ $4\underline{2}13$ $4\underline{2}31$

Y veremos que hay 6 permutaciones en las que B se lleva su sombrero; y lo mismo sucede para C y para D:

$12\underline{3}4$ $14\underline{3}2$ $21\underline{3}4$ $24\underline{3}1$ $41\underline{3}2$ $42\underline{3}1$
$123\underline{4}$ $132\underline{4}$ $213\underline{4}$ $231\underline{4}$ $312\underline{4}$ $321\underline{4}$

No debe preocuparnos que, por ejemplo, en la listas de A y de B haya permutaciones repetidas (1234 y 1243 aparecen en ambas), porque los errores de cálculo que puedan derivarse de ello serán compensados en los pasos siguientes. Como hemos dicho procederemos por «aproximaciones sucesivas». En este primer paso trabajamos solamente con personas individuales y decimos, simplemente, que cada una de ellas genera 6 permutaciones que deben ser restadas o excluidas del total de 24. Por tanto, restaremos $4 \cdot 6 = 24$ permutaciones y la primera aproximación al resultado nos dará $24 - 24 = 0$.

24 permutaciones – (6 donde A se lleva su sombrero) – (6 donde B se lleva su sombrero) – (6 donde C se lleva su sombrero) – (6 donde D se lleva su sombrero) = 0

Paso 2: En el primer paso hemos contado las permutaciones en las que *una* de las personas se lleva su propio sombrero, sin tener en cuenta que algunas de ellas pertenecen a más de un grupo. Por ejemplo, las permutaciones 1234 y 1243 están en el grupo en el que A se lleva su sombrero, y también en el grupo donde B elige el suyo. Así que estas permutaciones han sido restadas *dos* veces, una en el grupo de las 6 que correspondían a A, y otra en el grupo de las 6 de B. Las secuencias 1234 y 1243 son las permutaciones en las que A y B se llevan simultáneamente sus sombreros y que se obtienen fijando las cifras 1 y 2 y permutando las dos restantes. Esta idea nos permite deducir cuáles son las otras permutaciones repetidas:

Se llevan su sombrero:	A y B	A y C	A y D	B y C	B y D	C y D
Permutaciones:	$\underline{12}34$ $\underline{12}43$	$\underline{1}2\underline{3}4$ $\underline{1}4\underline{3}2$	$\underline{1}23\underline{4}$ $\underline{1}32\underline{4}$	$1\underline{23}4$ $4\underline{23}1$	$1\underline{2}3\underline{4}$ $3\underline{2}1\underline{4}$	$12\underline{34}$ $21\underline{34}$

Hay 12 permutaciones que han sido restadas *dos* veces cada una, cuando sólo debieron ser restadas una vez; para compensar este «error» sumaremos (o *incluiremos*) esas permutaciones que antes fueron restadas innecesariamente. Tendremos así una nueva aproximación a la respuesta: 24 – 24 + 12 = 12.

Paso 3: En el paso 1 hemos considerado a las personas individualmente y se han *restado* las permutaciones en las que cada una de ellas se ha llevado su propio sombrero, sin que nos importaran las repeticiones. En el paso 2 se han agrupado a las personas de dos en dos y hemos *sumado* las permutaciones en las que los miembros de cada pareja se llevan simultáneamente sus propios sombreros.

Siguiendo con esta pauta, en el paso 3 consideraremos los grupos de tres personas y restaremos aquellas permutaciones en las que las tres se llevan simultáneamente sus sombreros. Pero ahora tenemos cuatro grupos de tres personas:

Se llevan su sombrero:	A, B y C	A, B y D	A, C y D	B, C y D
Permutaciones:	$\underline{123}4$	$\underline{12}3\underline{4}$	$\underline{1}2\underline{34}$	$1\underline{234}$

Como vemos, por cada grupo de tres hay sólo una permutación en la que todos se llevan el suyo. Cada una se obtiene fijando tres cifras y aunque las cuatro permutaciones son en realidad la misma, 1234, el principio de inclusión-exclusión no toma en cuenta ese detalle. En conclusión, al total que teníamos hasta ahora deberemos restarle 4. La nueva aproximación es: 24 – 24 + 12 – 4 = 8.

Paso 4: Recapitulemos: en el paso 1 se han considerado personas individuales y hemos *restado* cierta cantidad de permutaciones del total de 24; en el paso 2 se ha trabajado con parejas de personas y hemos *sumado* una cantidad; en el paso 3 los grupos eran de tres personas y la cantidad ha sido *restada*. Finalmente, en el paso 4 tomaremos al único grupo de cuatro personas que existe, A, B, C y D, y sumaremos la única permutación que hay en la que los cuatro se llevan su propio sombrero ($\underline{1234}$, en la que se fijan los cuatro números). El resultado final es, en consecuencia, 24 – 24 + 12 – 4 + 1 = 9.

Si hubiese cinco personas se procedería de manera similar, pero en cinco pasos; en el primero, al total de $5! = 120$ permutaciones se le restan totas aquellas que corresponden a las personas individuales (en las que se fija una cifra), en el segundo paso se suman las permutaciones donde se fijan dos personas, y así sucesivamente.

Ahora bien, si escribimos la cantidad de distribuciones en las que ninguna de las cuatro personas se lleva su sombrero, tal y como nos lo indicó el razonamiento de inclusión-exclusión: 24 – 24 + 12 – 4 + 1, ¿cuál es entonces la probabilidad de que *nadie* se lo lleve? La respuesta es:

$$\frac{24-24+12-4+1}{24}=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$$

Para el caso de cinco personas la probabilidad quedaría escrita así:

$$\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$$

Y lo mismo para seis, siete o cualquier otra cantidad mayor. Inclusive la misma expresión se aplica al caso de tres personas, ya que $\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}$ da $\frac{2}{6}$, que es la probabilidad que indicamos antes, y también se aplica para el caso de dos personas, y para el de un solo individuo (en el caso de dos personas la probabilidad es $\frac{1}{2}$; y cuando hay solamente una la probabilidad es cero, ya que si hay una sola persona y un solo sombrero es imposible que no se lleve el suyo propio).

Pero ya vimos en el capítulo anterior que, a medida que se añaden sumandos, el resultado del cálculo $\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$ se va aproximando cada vez más a $\frac{1}{e}$.

En otras palabras, a medida que el número de personas crece, la probabilidad de que nadie se lleve su propio sombrero se acerca cada vez más a $\frac{1}{e}\cong 0,3679$. Por ejemplo, para cinco personas la probabilidad es $\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}=0,3666\dots$

Esta conclusión es sumamente sorprendente por dos motivos. Uno, por la aparición del número e en un problema con el que, *a priori*, no parecía tener ninguna vinculación .Y dos, por el que se deriva de la siguiente reflexión: si en el restaurante Alfa hay 20 hombres que se distribuyen sombreros y en el Beta, mucho más grande, hay un millón de hombres, ¿en cuál de los dos es más probable que nadie se lleve su propio sombrero?

La intuición nos dice que es mucho más probable, casi seguro, que en el restaurante Beta nadie acierte a llevarse el suyo. Porque la probabilidad de que, por ejemplo, el primer hombre elija su propio sombrero es de un millonésimo, mientras que en el Alfa es de $\frac{1}{20}$. Además, en el Beta, el último hombre podrá llevarse su sombrero sólo si no fue elegido por ninguna de las 999.999 personas anteriores. Sin embargo, contradiciendo a la intuición, y según el resultado indicado más arriba, tanto en el restaurante Alfa como en el Beta la probabilidad de que nadie se lleve su propio sombrero es prácticamente la misma, del 36,79% Y sería también igual aunque hubiera cincuenta personas o un trillón.

Este resultado puede servir para llevar a cabo un «truco de adivinación», en el que un mago coge una baraja española y hace cuatro pilas de doce cartas con cada uno de los cuatro palos: oros, copas, bastos y espadas. Luego procede a ponerse de espaldas y le pide a un voluntario que mezcle entre sí las cartas de oros, y que haga lo mismo con las de las otras tres pilas. Después pide que se vayan sacando una por una las cartas de la pila de oros mientras él enuncia en voz alta los números del 1 al 12, ya sea en orden creciente o en cualquier otro orden que desee. Antes de empezar, el mago habrá predicho que, al menos una vez, el número que él diga coincidirá con el de la carta que saque el voluntario. Si al terminar la pila de oros no se ha producido ninguna coincidencia, la operación se repetirá con la pila de copas, y así una y otra vez con las otras dos, hasta que la predicción se cumpla. Cuando la coincidencia se produzca, el mago saludará y recibirá los aplausos del público.

Obviamente el truco puede «fallar», quizá la persona que se prestó a ayudar al mago pase las cartas de las cuatro pilas sin que se produzca ninguna coincidencia; pero ¿cuál es la probabilidad de que eso suceda? La pregunta equivale a plantearse cuál es la probabilidad de que en cuatro restaurantes diferentes, con 12 clientes cada uno, ningún cliente se lleve su propio sombrero; en este símil, cada «restaurante» es una de las pilas de cartas, los números que el mago enumera son los clientes y las cartas son los sombreros; que el mago diga «seis» al tiempo que el voluntario saca precisamente esa carta equivale a que el cliente número seis elija, por azar, su propio sombrero.

Si sólo hubiera una pila, la probabilidad de que el truco fallara sería de aproximadamente 0,3679, pero si hay cuatro pilas la probabilidad se obtiene multiplicando ese número por sí mismo cuatro veces, es decir de $(0,3679)^4 = 0,018$ (redondeando a tres cifras decimales). En otras palabras, habrá un 98,2% de probabilidad de que el truco salga bien, o lo que es lo mismo, un 98,2% de posibilidades de que se produzca al menos una coincidencia. Por tanto, el mago se arriesgará a realizar el truco porque lo más seguro es que triunfe.

Si es un mago audaz quizá vaya un poco más allá y le indique a su colaborador que cuando se produzca una coincidencia en una pila, la abandone y pase a la siguiente. En ese caso podrá hacer una predicción todavía más arriesgada y asegurar

ABRAHAM DE MOIVRE, UN GRAN ADMIRADOR DE NEWTON

El matemático francés Abraham de Moivre nació en Vitry-le-François, el 26 de mayo de 1667, en el seno de una familia protestante. Estudió matemáticas en la academia de Sedan, donde destacó por su gran capacidad; sin embargo, en 1685, tras las guerras de religión y la expulsión de los hugonotes por el rey Luis XIV, De Moivre se vio obligado a exiliarse en Londres, de donde ya no regresó.

En Inglaterra, De Moivre pudo leer la primera edición de los *Principia* de Newton, y supo inmediatamente que se trataba de una obra maestra. Por ello escribió algunos trabajos brillantes relacionados con la misma, pero al ser extranjero le fue difícil lograr que fueran publicados. Quien finalmente le allanó el camino fue Edmond Halley (1656-1742), físico, matemático y astrónomo que, entre otras cosas, había financiado la publicación de la obra magna de Isaac Newton. Halley reconoció la calidad del trabajo de De Moivre y, gracias a su influencia, consiguió que fuera nombrado miembro de la Royal Society de Londres.

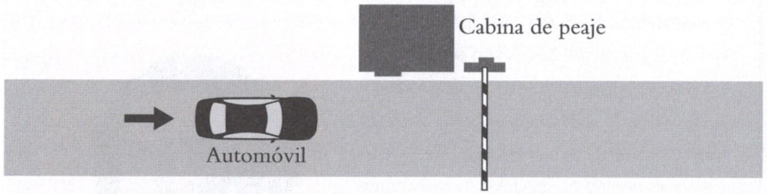
Este insigne científico publicó trabajos de primera magnitud sobre análisis matemático, geometría analítica y la teoría de probabilidades y es recordado por la fórmula que permite calcular fácilmente las potencias de un número complejo: la fórmula de De Moivre.

Abraham de Moivre falleció en Londres el 27 de noviembre de 1754.

que habrá una coincidencia en al menos *dos* de las pilas. La probabilidad de que esto suceda es del 85,6%, lo que también supone una alta expectativa de éxito.

Los procesos de Poisson

Veamos ahora otro ejemplo relacionado con el cálculo de probabilidades en el que interviene el número *e*. Imaginemos que en una autopista hay una cabina de peaje en la que, de vez en cuando, se detiene un automóvil, tal y como muestra la figura siguiente. Y supongamos que durante un determinado lapso de tiempo los vehículos van llegando a la cabina a un ritmo más o menos constante de unos 12 automóviles por hora. Nos referimos a un ritmo *promedio*, ya que la cantidad de coches que realmente pasarán a lo largo de una hora podrá ser mayor o menor que 12.



En la figura un automóvil se acerca a una cabina de peaje.

¿Cómo podríamos averiguar cuál es la probabilidad de que durante la siguiente hora pasen por la cabina exactamente diez automóviles?

En este escenario estudiamos la cantidad de veces que puede suceder un determinado evento a lo largo de un período específico de tiempo, dando por supuesto que esos eventos –la llegada de un automóvil a la cabina–, *a priori* aleatorios o impredecibles, ocurren a un ritmo más o menos constante. Cuando se cumplen estas hipótesis se dice que estamos estudiando un *proceso de Poisson*, porque el matemático francés Siméon Denis Poisson analizó este tipo de situaciones y publicó un trabajo al respecto en 1837. En ese estudio, titulado *Investigaciones sobre la probabilidad en los juicios en materia penal y en materia civil* (en el original: *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et matière civile*), Poisson consideraba los errores judiciales como eventos que ocurrían aleatoriamente, y en base a ello, calculaba la probabilidad de que sucediera cierto número de errores de ese tipo a lo largo de un período de tiempo determinado.

SIMÉON DENIS POISSON, UN AMANTE DE LAS MATEMÁTICAS

Siméon Denis Poisson nació en Pithiviers, Francia, el 21 de junio de 1781 y estudió matemáticas en la École Polytechnique de París, donde tuvo la suerte de tener como maestros a los célebres matemáticos Pierre-Simon Laplace (1749-1827) y Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), quienes rápidamente advirtieron el gran talento de su alumno. En 1802, tras graduarse, Poisson comenzó a trabajar como profesor de matemáticas en esa misma escuela parisina. Bajo la supervisión de Lagrange y Laplace, Poisson publicó su primer trabajo de investigación en 1808 en el que analizaba las perturbaciones que sufren los movimientos planetarios debido a la influencia gravitatoria de los otros cuerpos del sistema solar. Tras éste realizó un gran número de trabajos de primera magnitud sobre física, ecuaciones diferenciales y probabilidades. En sus últimos años declaró que lo mejor de su vida había sido «descubrir las matemáticas y enseñar matemáticas». Poisson falleció en Sceaux, cerca de París, el 25 de abril de 1840.

Pero la nomenclatura matemática comete aquí otra injusticia histórica, similar a la que denomina logaritmos *neperianos* a los logaritmos naturales, cuando su verdadero descubridor no fue John Napier, sino Jobst Bürgi. De igual forma, los llamados procesos de Poisson fueron estudiados por primera vez por Abraham de Moivre en 1711, antes de que Poisson naciera, en un artículo publicado en *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Lo tituló *De Mensura Sortis seu; de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus*, que puede traducirse como *Sobre la medición de la probabilidad, o, sobre la probabilidad de eventos en los juegos con oportunidades fortuitas*.

En algunos casos, los procesos de Poisson han sido la base de estudios bastante originales, como el que hizo el matemático ruso Ladislaus Bortkiewicz (1868-1931), quien en 1898 publicó un trabajo en el que estudiaba el número de soldados del ejército prusiano muertos al ser coceados por un caballo. Pero lo habitual es que esta teoría se emplee para fines más prácticos, como establecer el número de llamadas que recibe una central telefónica durante un período determinado, averiguar la cantidad de partículas que emite una sustancia radiactiva o saber cuántos taxis pasan por una esquina específica durante un cierto lapso de tiempo. Un lapso que no debe ser muy extenso para que se cumpla la hipótesis de que el ritmo de llegadas sea más o menos constante.

Pero volvamos a nuestra cabina de peaje por la que pasan aproximadamente 12 automóviles por hora. Queríamos averiguar cuál es la probabilidad de que, a lo largo de una hora, pasen por ella exactamente diez automóviles. Pero antes nos formularemos otra cuestión: ¿cuál es la probabilidad de que a lo largo de una hora no pase *ningún* automóvil? Obviamente, si normalmente pasa un promedio de 12 vehículos por hora, es muy poco probable que no pase ninguno, pero, aunque difícil, podría suceder; calculemos, pues, el valor exacto de esta probabilidad.

Primero dividiremos el período de una hora en n partes, cada una de ellas tan pequeña como para que sea imposible que en ese tiempo lleguen a la cabina dos o más automóviles. Por ejemplo, podríamos tomar $n = 3.600$; si dividimos la hora en 3.600 partes, cada una de ellas mide un segundo, y en un período de un segundo no hay tiempo material de que lleguen dos o más automóviles.

Una vez hecha esa división podremos constatar que la probabilidad de que en ese período de tiempo llegue exactamente un automóvil es de $\frac{12}{n}$ y, por lo tanto, la de que no llegue ninguno es de $1-\frac{12}{n}$. De la misma forma, si en una moneda que no esté equilibrada la probabilidad de que salga cara es de 0,4, entonces la de que salga cruz es de $1 - 0{,}4 = 0{,}6$. Finalmente, para hallar la probabilidad de que no llegue un automóvil en ninguno de los n períodos de tiempo multiplicaremos $1-\frac{12}{n}$ por sí mismo n veces, lo que significa que será de $\left(1-\frac{12}{n}\right)^n$.

Ahora, para obtener la respuesta, deberemos reducir cada vez más esos períodos hasta convertirlos en instantes *puntuales* de tiempo. En otras palabras, deberemos conseguir que n tienda a infinito. Es muy interesante observar la similitud entre el cálculo que estamos haciendo y el razonamiento del capítulo 1 relacionado con el interés compuesto. En aquella ocasión también dividimos el período de tiempo considerado (en aquel caso, un año) en períodos más pequeños: semestres, bimestres, meses, días, horas, hasta llegar a meros instantes de tiempo.

En consecuencia, la probabilidad de que ningún automóvil llegue a la cabina de peaje es el valor al que se va acercando la expresión $\left(1-\frac{12}{n}\right)^n$ cuando n representa valores cada vez más grandes. Y sucede que, así como la expresión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se

LA SUMA ES IGUAL A 1

Como se ha comentado, la probabilidad de que en el transcurso de una hora lleguen k automóviles a la cabina de peaje es de $\frac{12^k e^{-12}}{k!}$, siempre que 12 sea la cantidad promedio de automóviles por hora. Ahora bien, si sumamos todas las probabilidades de todas las cantidades posibles de coches –la probabilidad de que lleguen cero automóviles, más la de que llegue uno, más la de que lleguen 2, 3, etcétera–, el resultado tiene que ser igual a 1; si lo verificamos matemáticamente, vemos que, en efecto, la suma de todas las probabilidades es:

$$\frac{e^{-12}}{0!}+\frac{12e^{-12}}{1!}+\frac{12^2e^{-12}}{2!}+\frac{12^3e^{-12}}{3!}+\cdots=e^{-12}\left(\frac{1}{0!}+\frac{12}{1!}+\frac{12^2}{2!}+\frac{12^3}{3!}+\cdots\right).$$

Recordemos que, según vimos en el capítulo anterior, $e^x=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$
Si en esta expresión $x = 12$, podemos deducir que el resultado de la suma infinita que aparece entre paréntesis más arriba es e^{12}. Por tanto, la suma de todas las probabilidades es $e^{-12}e^{12}=\frac{1}{e^{12}}e^{12}=1$.

acerca al número e, de manera similar la expresión $\left(1-\frac{12}{n}\right)^n$ se acerca a e^{-12}, que es lo mismo que $\frac{1}{e^{12}}$. Por lo tanto, la probabilidad de que no llegue ningún automóvil es $\frac{1}{e^{12}}$, aproximadamente seis millonésimos. Es decir que, supuestamente, ese acontecimiento puede suceder unas seis veces por cada millón de horas. Dado que un millón de horas equivale a poco más de 114 años, podemos concluir que, si el ritmo de 12 automóviles por hora se mantiene constante día y noche durante más de un siglo, el hecho de que no pase ningún coche durante toda una hora sucedería aproximadamente una vez cada 19 años.

Ahora bien, ¿cuál es la probabilidad de que pasen exactamente 10 automóviles? El razonamiento en este caso es similar al que mostramos más arriba: se divide la hora en n partes pequeñas y se calcula la probabilidad de que en exactamente diez de ellas llegue un automóvil. Una vez obtenida esa expresión se obtiene el valor al que se aproxima cuando n tiende a infinito. El resultado es el siguiente:

$$\text{Probabilidad de que lleguen 10 automóviles en una hora} = \frac{12^{10}e^{-12}}{10!}=\frac{12^{10}}{10!}\cdot\frac{1}{e^{12}}.$$

La probabilidad es aproximadamente del 10,48%. Generalizando, la probabilidad de que lleguen k automóviles en el transcurso de una hora es de $\frac{12^k e^{-12}}{k!}$ (si $k = 0$ se obtiene, efectivamente, e^{-12}); mientras que para un período de t horas, sea t entero o no, la probabilidad es de $\frac{(12t)^k e^{-12t}}{k!}$.

Pero existe otro cálculo, asociado a esta misma situación, en el que también interviene el número *e*. Supongamos que un automóvil acaba de salir de la cabina de peaje y que en ese momento nos preguntamos cuál es la probabilidad de que el próximo coche tarde más de 10 minutos en llegar (período que expresamos como $\frac{1}{6}$ de hora, ya que estamos midiendo el tiempo en esta unidad). Esto equivale a preguntarse cuál es la probabilidad de que durante los siguientes 10 minutos no pase ningún automóvil, que es, según las fórmulas que hemos mostrado más arriba, de $e^{-12\frac{1}{6}} = e^{-2} \cong 0{,}1353$, es decir, del 13,53%.

Pero hay otras aplicaciones más prácticas: imaginemos que estamos en una esquina en la que sabemos que pasa un taxi cada cinco minutos aproximadamente ($\frac{1}{5}$ de taxi por minuto, en promedio); justo se nos acaba de escapar uno y necesitamos imperiosamente coger un taxi en los próximos 60 segundos. ¿Cuál es la probabilidad de que lo logremos? La respuesta, según lo que ya hemos visto, es que esa probabilidad es de

$1-e^{-\frac{1}{5}} \cong 0{,}1813$, es decir, del 18,13%. No hay duda de que, aunque no siempre seamos conscientes de ello, el número *e* interviene hasta en las situaciones más comunes y cotidianas.

La distribución normal y la máquina de Galton

He aquí un ingenio relacionado con las probabilidades en el que aparece el número *e*. Se trata de la *máquina de Galton*, un mecanismo llamado así porque fue concebido por primera vez por el inglés Francis Galton.

La máquina en cuestión es un dispositivo que consiste en una caja colocada verticalmente por la que va cayendo sucesivamente un gran número de pequeñas bolas (para que el efecto que vamos a describir sea visible, la cantidad de bolitas debe ser grande, de al menos unas 300). En su descenso, las bolitas chocan con una serie de obstáculos y, cuando eso sucede, cada una de ellas cae, al azar, hacia la derecha o hacia la izquierda. Al final del recorrido, todas las bolas se acaban acumulando en

los diferentes receptáculos que están ubicados en la parte inferior de la caja, como muestra la figura siguiente.

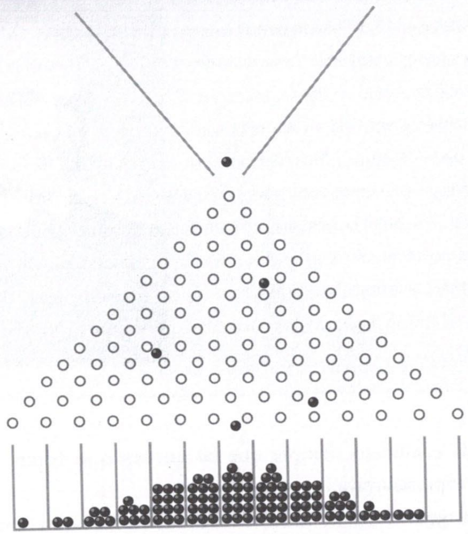
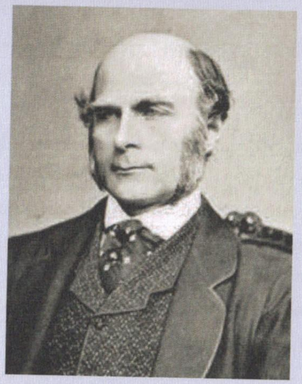


Imagen esquemática de una máquina de Galton. Tras golpear contra los obstáculos, las bolitas se van acumulando en los receptáculos inferiores.

En una máquina de Galton el número de receptáculos es siempre igual a la cantidad de obstáculos que cada bolita se encuentra en su caída más uno. En caso de que sean 20 (cuantos más obstáculos sean, más visible es el efecto que vamos a describir) el receptáculo del extremo izquierdo recibirá todas las bolas que, tras chocar, caigan siempre hacia la izquierda; en el receptáculo siguiente estarán las que cayeron 19 veces hacia la izquierda y una vez hacia la derecha; y así sucesivamente, hasta llegar al receptáculo del extremo derecho, en el que se agolparán las bolitas que saltaron siempre hacia la derecha. ¿Cómo quedarán distribuidas todas ellas en cada uno de los receptáculos? Es interesante constatar que, aunque sea imposible predecir en qué receptáculo caerá cada una de las bolas, sí podremos saber, en cambio, qué «dibujo» formarán globalmente. Esta situación es completamente análoga a lo que sucede en los sondeos previos a una jornada electoral, porque aunque no se puede saber con antelación por quién votará un ciudadano específico, los encuestadores pueden predecir con bastante exactitud qué porcentaje de votos recibirá

FRANCIS GALTON, UN INVESTIGADOR MULTIDISCIPLINAR

Francis Galton nació en Sparkbrook, cerca de Birmingham, Inglaterra, el 16 de febrero de 1822. Estudió medicina y matemáticas en la Universidad de Cambridge, donde se graduó en 1844. Galton, que fue fundamentalmente explorador y antropólogo, viajó por gran parte de África y fue pionero en el estudio de la inteligencia humana desde un punto de vista evolutivo. Sus contribuciones a la ciencia le valieron grandes reconocimientos, entre ellos, la *Royal Medal* otorgada por la Royal Society de Londres. Francis Galton falleció en Surrey, Inglaterra, el 17 de enero de 1911.



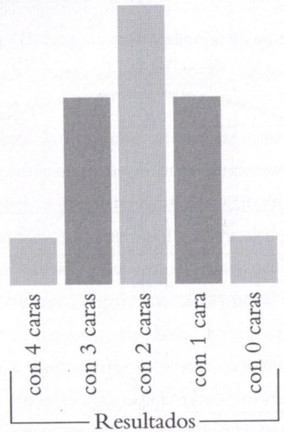
globalmente cada candidato siempre que las encuestas se basen en una muestra suficientemente representativa..

Antes de averiguar de qué modo se distribuirán las bolitas en los receptáculos, plantearemos una cuestión más sencilla. Si lanzamos una moneda equilibrada cuatro veces ¿qué es más probable que obtengamos, cuatro caras, o dos caras y dos cruces? Observemos en primer lugar que al lanzar una moneda cuatro veces existen 16 resultados posibles, que agruparemos según la cantidad de caras (C) y de cruces (X).:

CCCC	(resultados con 4 caras)
CCCX, CCXC, CXCC, XCCC	(resultados con 3 caras)
CCXX, CXCX, CXXC, XCCX, XCXC, XXCC	(resultados con 2 caras)
XXXC, XXCX, XCXX, CXXX	(resultados con 1 cara)
XXXX	(resultados con 0 caras)

Mientras que hay seis resultados en los que se obtienen dos caras y dos cruces, hay solamente uno con cuatro caras; esto quiere decir que es seis veces más probable obtener dos caras y dos cruces que obtener cuatro caras. Concretamente, la probabilidad de cuatro caras es de $\frac{1}{16} = 0,0625$, mientras que para dos caras y dos cruces

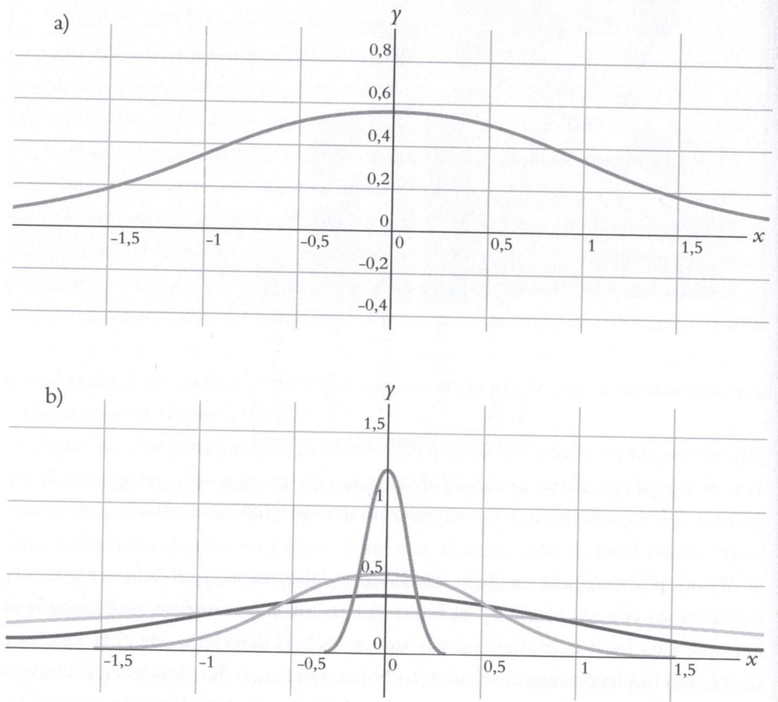
la probabilidad es de $\frac{6}{16} = 0,375$. La figura nos muestra una representación gráfica de las diferentes cantidades de resultados en la que la columna central (que representa la cantidad de resultados en los que hay dos caras y dos cruces) es seis veces más alta que las columnas de los extremos.



Como la altura de las columnas es proporcional a la cantidad de resultados, la columna central es seis veces más alta que las de los extremos.

Ahora volvamos a la máquina de Galton e imaginemos que cada vez que una bolita choca con un obstáculo, la bolita «lanza», metafóricamente, una moneda al azar que salta hacia la izquierda si sale cara, y hacia la derecha si sale cruz. Esto nos dice que si hubiera cuatro obstáculos, las bolitas quedarían distribuidas en los receptáculos del fondo de la caja tal como muestra la figura anterior: la mayor parte de las bolitas quedaría en el receptáculo central (porque es más probable saltar dos veces a la izquierda y dos a la derecha que cualquier otra combinación de saltos) mientras que las cantidades irían disminuyendo simétricamente hacia los extremos de la caja. Lo mismo sucedería si el número de obstáculos fuera mayor: el receptáculo central recibiría una cantidad mayor de bolitas, y el número disminuiría simétricamente hacia los extremos.

De hecho, puede demostrarse que si tanto el número de bolitas como el de obstáculos es grande (para ambos, cuanto más grande, mejor), las columnas de bolitas de la parte inferior de la caja dibujarán una curva similar a la que se muestra en el primer gráfico (curva que, dependiendo del número de bolitas y del número de obstáculos, puede ser, tal como se ve en el segundo gráfico, más, o menos, «achatada»).



La figura a) es la curva «madre»; todas las demás son deformaciones de ella.

Por tanto, en esas condiciones, la llegada de las bolitas a un receptáculo específico puede ser tratada matemáticamente como un proceso de Poisson, similar al caso de los automóviles y la cabina de peaje. Y en esa situación, la probabilidad de que una bolita acabe en un receptáculo específico puede ser calculada usando la fórmula en la que aparece el número *e*. No es de sorprender, entonces, que en la expresión matemática que describe a las curvas de la figura anterior también intervenga el número *e*. De hecho, la curva «madre» está descrita matemáticamente por la siguiente expresión en la que, una vez más, no sólo interviene el número *e* sino también π:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

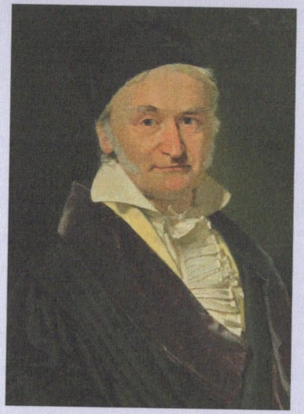
Esto quiere decir que si P, con coordenadas (x,y), es un punto de la curva de la figura a) (ver página anterior), entonces el valor de y puede calcularse aplicándole a x la fórmula indicada más arriba.

En la máquina de Galton, la cantidad de bolitas que finalmente habrá en cada receptáculo es el resultado de muchos eventos aleatorios sucesivos, generados por los choques de las bolitas contra los obstáculos. De ello se desprende que ciertos números surgirán aleatoriamente como el resultado final de una serie de eventos azarosos independientes entre sí. Bajo esas suposiciones, se puede demostrar que esos números aleatorios se distribuirán siguiendo una curva similar a la que se muestra en la figura a) de la página anterior. Es decir, habrá una cantidad «central» cuya probabilidad será mayor y, a medida que nos vayamos alejando de ella, las probabilidades irán disminuyendo simétricamente. De las cantidades distribuidas según este patrón se dice que están *distribuidas normalmente* o que siguen una *distribución normal*.

Una aplicación muy importante de la distribución normal se da en la teoría de los errores de medición. Cuando, por ejemplo, los astrónomos intentan establecer la ubicación de una estrella, la posición que se registra nunca es la exacta ya que, inevitablemente, surgen errores de medición causados, entre otros factores, por pequeños defectos en la lente del telescopio, imperfecciones en el ojo del observador o desviaciones de la luz provocadas por efectos atmosféricos. Como son el resultado de diversos eventos aleatorios, la propiedad ya mencionada nos dice que esos errores seguirán una distribución normal. Lo que, a su vez, permitirá conocer de manera aproximada la magnitud de los errores cometidos y dar así una buena aproximación de la posición real de la estrella.

Esta técnica para determinar errores en mediciones astronómicas fue usada con gran éxito por Carl Friedrich Gauss en los primeros años del siglo XIX, y es por eso que cualquier curva como la de la figura anterior se suele llamar una *campana de Gauss*. Otra pequeña injusticia histórica más, pues la distribución normal ya había sido descubierta mucho antes de los tiempos de Gauss. Varios matemáticos así lo constataron en diversos estudios realizados a lo largo del siglo XVIII; el primero de ellos fue un trabajo publicado en 1733 del ya mencionado Abraham de Moivre.

CARL FRIEDRICH GAUSS, UNO DE LOS GRANDES



Johann Carl Friedrich Gauss nació en el ducado de Brunswick, actualmente en Alemania, el 30 de abril de 1777. Si ya en vida fue reconocido como el mejor matemático del momento, hoy está considerado, junto con Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.) y Newton, uno de los tres matemáticos más grandes de la historia.

Resulta imposible resumir la enorme obra de Gauss en unas pocas líneas, así que daremos solamente una pincelada del precoz talento de un joven que, con sólo 17 años, resolvió un problema que llevaba siglos sin solución. ¿Pueden los polígonos regulares de 7, 9, 11, 13, 14, 17, 18 y 19 lados ser construidos con regla y compás?

Aunque en la antigüedad clásica ya se conocían los métodos para construir con regla y compás los polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16 y 20 lados, se desconocía si era o no posible hacerlo con los polígonos regulares arriba mencionados.

La incógnita fue resuelta por Gauss en 1794, cuando demostró que, de todos esos polígonos, sólo era posible construir con regla y compás el de 17 lados y explicó cómo hacerlo, aportando la primera nueva construcción de este tipo conocida en más de dos mil años. Gauss estuvo siempre tan orgulloso de ese logro que, a pesar los innumerables triunfos que alcanzó a lo largo de su vida, pidió que en su lápida se grabara un polígono regular de 17 lados inscrito en una circunferencia.

Gauss falleció en Gotinga, Alemania, el 25 de febrero de 1855.

Como hemos visto, las probabilidades y la estadística están presentes en muchas facetas de nuestra vida cotidiana, y en muchos de esos ejemplos interviene la campana de Gauss. Entre ellos, los pesos reales de los productos enlatados que se compran en un supermercado —que no siempre coinciden con los indicados en el envase—, la vida útil de las bombillas eléctricas, o las longitudes de los tornillos producidos por una misma máquina.

Sin embargo, hay que tener cuidado y evitar caer en el «abuso» de la distribución normal. Los resultados de los *tests de inteligencia*, por ejemplo, suelen indicarse

siguiendo una campana de Gauss con el valor 100 en el centro. Pero esto sólo se refiere a los *resultados* de los tests y no necesariamente a la inteligencia en sí; no hay ninguna razón para suponer que la inteligencia humana se distribuye siguiendo una campana de Gauss, ni para creer que la complejidad y riqueza de la inteligencia humana puede ser medida simplemente con un número.

Capítulo 4

Un número irracional, trascendente y tal vez normal

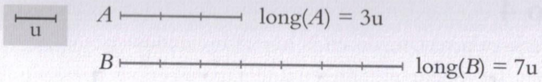
Ya hemos aprendido diversos hechos acerca del número e y sobre la extraordinaria capacidad que tienen las matemáticas para describir cuantitativamente fenómenos naturales o económicos. En realidad, la idea de que el universo está regido por leyes que pueden ser expresadas matemáticamente es muy anterior al descubrimiento del número *e*. Al menos en Occidente, los primeros en ser conscientes de ello fueron los pitagóricos, los discípulos del filósofo y matemático Pitágoras de Samos, que vivió en el siglo VI a.C.

Tanta era la importancia que los pitagóricos le atribuían a las matemáticas que el lema principal de su escuela era *todo es número*, refiriéndose exclusivamente a los números enteros positivos, como 1, 2, 3, 4, 5, etcétera. Y es que los pitagóricos creían que todas las magnitudes y relaciones cuantitativas del universo se podían describir mediante números enteros.

Según ellos, siempre era posible elegir una determinada unidad de medida para expresar las longitudes de cualquier par de segmentos, A y B, en forma de números enteros. Por ejemplo, si A y B miden 2,4 y 3,04 metros respectivamente, sus medidas obviamente, *no* son enteras. Pero si las expresamos en centímetros, las longitudes de A y de B pasan a ser de 240 y 304 centímetros, ambas, ahora sí, cantidades enteras. Los pitagóricos sostenían que esta conversión se puede hacer con *cualquier* par de segmentos. Pero, ¿realmente es así, o existen segmentos que contradicen esta idea?

Los inconmensurables o la imposibilidad de medir dos segmentos a la vez

Veamos: imaginemos dos segmentos A y B que tal como sostenían los pitagóricos, pueden ser expresados en base a una unidad u, es decir, en base a un segmento fijado como unidad de medida para que la longitud de A pueda ser expresada como un entero positivo n, y la de B, como un entero positivo m. Imaginemos, tal y como muestra la figura siguiente, que A mide 3 unidades y que B mide 7 unidades.



El segmento A mide 3 veces la unidad y B, 7 veces.

De esta figura se deduce que $\text{long}(A) = \frac{3}{7}\text{long}(B)$, donde $\text{long}(A)$ es la longitud del segmento A y $\text{long}(B)$, la de B; y en consecuencia, $\frac{\text{long}(A)}{\text{long}(B)} = \frac{3 \text{ unidades}}{7 \text{ unidades}} = \frac{3}{7}$.

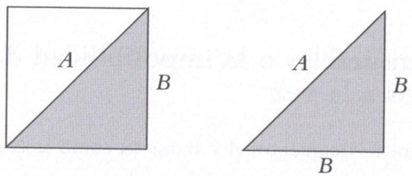
Por lo tanto, si A mide n unidades y B mide m unidades, podremos extrapolar que:

$$\frac{\text{long}(A)}{\text{long}(B)} = \frac{n \text{ unidades}}{m \text{ unidades}} = \frac{n}{m}.$$

Lo que significa que para que exista esa unidad u, el cociente de las longitudes de A y B debe poder escribirse como una fracción. En el ejemplo mostrado más arriba se cumple, en efecto, que

$$\frac{\text{long}(A)}{\text{long}(B)} = \frac{2{,}4 \text{ m}}{3{,}04 \text{ m}} = \frac{15}{19}.$$

Pero, para su enorme sorpresa, los pitagóricos descubrieron que esta condición *no* siempre se cumple. Se percataron de que el cociente de las longitudes de ciertos segmentos no se puede expresar en forma de fracción, por lo que para éstos no existe una unidad u que permita expresar ambas longitudes como números enteros. Pongamos un ejemplo en el que B es el lado de un cuadrado cualquiera, y A la diagonal del mismo:



A = hipotenusa B = cateto

A la izquierda, un cuadrado de lado B y diagonal A.
A la derecha, un triángulo rectángulo en el que A es la hipotenusa y B el cateto.

En esta figura hemos pintado de gris una de las dos mitades del cuadrado, la cual es un triángulo rectángulo en el que la hipotenusa es el segmento A y cada cateto es igual a B. Según el teorema de Pitágoras, en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Por lo tanto el siguiente enunciado es válido para dicha figura:

$$\text{long}(A)^2 = \text{long}(B)^2 + \text{long}(B)^2$$

$$\text{long}(A) = \sqrt{\text{long}(B)^2 + \text{long}(B)^2} = \sqrt{2\,\text{long}(B)^2} = \sqrt{2}\,\text{long}(B)$$

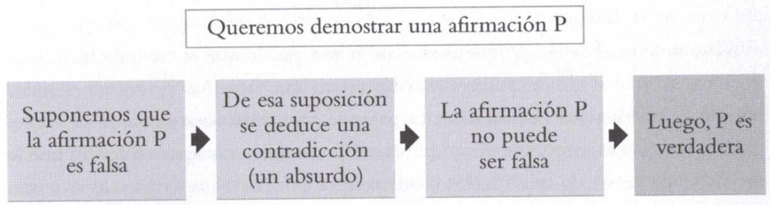
Es decir, $\text{long}(A) = \sqrt{2}\text{long}(B)$, y en consecuencia:

$$\frac{\text{long}(A)}{\text{long}(B)} = \frac{\sqrt{2}\,\text{long}(B)}{\text{long}(B)} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\text{long}(A)}{\text{long}(B)} = \sqrt{2}$$

La pregunta es: ¿se puede expresar $\sqrt{2}$ como una fracción? Según demostraron los pitagóricos, la respuesta es no.

Para comprobarlo, emplearemos una técnica de demostración muy usada en matemáticas llamada *demostración por el absurdo* o por *reducción al absurdo.* Según este método, si queremos demostrar una afirmación procederemos a comprobar que no puede ser falsa, porque si lo fuera se produciría una contradicción. Para ello primero se niega aquello que se quiere demostrar, y luego se obtienen sucesivas consecuencias lógicas de esa negación hasta llegar a una imposibilidad lógica. Es decir, a una *contradicción* o *absurdo*, que prueba que no es posible que la afirmación sea falsa, y que, por tanto, tiene que ser verdadera. La figura siguiente muestra el esquema general de una demostración por el absurdo.



Esquema general de una demostración por el absurdo o de reducción al absurdo.

¿Cómo se aplica este método a la demostración de que $\sqrt{2}$ no se puede escribir como fracción? Lo que queremos evidenciar es que no existen enteros positivos n y m y que por lo tanto $\sqrt{2}$ no puede ser igual a $\frac{n}{m}$. Siguiendo este método de demostración por el absurdo, comenzaremos suponiendo que sí existen dos enteros n y m tales que:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}.$$

A partir de esta igualdad, intentaremos deducir una contradicción. Empecemos por observar que cualquier fracción puede ser escrita con un numerador y un denominador que no tengan divisores en común; por ejemplo, la fracción $\frac{42}{98}$ puede escribirse también como $\frac{3}{7}$, sin que 3 y 7 tengan divisores comunes. Podemos suponer, entonces, que los números n y m han sido elegidos precisamente porque no tienen divisores en común.

A continuación, elevamos ambos miembros de la igualdad al cuadrado:

$$2 = \frac{n^2}{m^2}.$$

Y por lo tanto: $2m^2 = n^2$.

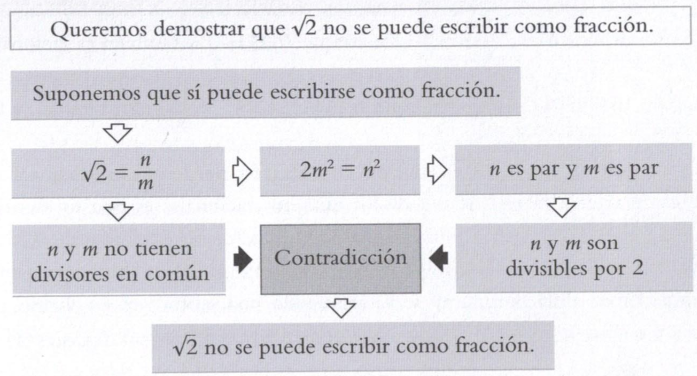
Como vemos que n^2 es el doble de m^2 deducimos que n^2 es par y que, por lo tanto, n también lo es. Por ejemplo, $36 = 6^2$ es par y 6 también. Así que, dado que es par, n es el doble de algún número entero k: $n = 2k$. Entonces:

$$n^2 = (2k)^2$$
$$n^2 = 4k^2$$

Y dado que $2m^2 = n^2$, concluimos que:

$$2m^2 = 4k^2$$
$$m^2 = 2k^2$$

Como m^2 es el doble de k^2 entonces m^2 es par, por lo que m también lo es. Deducimos así que si $\sqrt{2}$ se pudiera escribir como una fracción $\frac{n}{m}$ entonces *ambos* números deberían ser necesariamente pares, y por tanto forzosamente divisibles por 2; pero esto es imposible porque, como dijimos antes, cualquier fracción puede escribirse de tal modo que los dos números que la forman no tengan divisores en común. Aquí hemos encontrado una contradicción porque la fracción $\frac{n}{m}$ tiene una propiedad que *no puede* tener: sus dos componentes son pares. Como la contradicción surge de suponer que la fracción $\frac{n}{m}$ existe, concluiremos que en realidad esa fracción no puede existir, tal y como muestra el esquema siguiente.



Esquema de la demostración de raíz de 2.

Por tanto hemos visto que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como fracción y que, por ello, es imposible encontrar una unidad *u* según la cual las longitudes del lado y de la diagonal del cuadrado se expresen con números enteros. El lado y la diagonal del cuadrado son, según la denominación que les dieron los mismos pitagóricos, *segmentos inconmensurables*, palabra que significa, literalmente, «que no pueden ser medidos al mismo tiempo».

Cuenta la leyenda que, cuando se comprobó que la existencia de los inconmensurables refutaba su lema de *todo es número (entero)*, se desató una crisis tan grave entre los pitagóricos que los miembros de la escuela intentaron mantener ese inquietante hallazgo en secreto. Pero parece ser que Hipaso de Metaponto, quien según algunas versiones fue el descubridor de los inconmensurables, se opuso a ese «pacto de silencio» e hizo público el descubrimiento. Algunos documentos atestiguan que pagó esa «traición» con su propia vida.

Fuese o no responsabilidad de Hipaso, lo cierto es que la existencia de los inconmensurables no permaneció oculta durante mucho tiempo y, entre otras consecuencias, provocó que los números reales fueran clasificados en dos grupos. Por un lado, los números *racionales*, que son aquellos que sí pueden escribirse como una fracción, y por el otro los *irracionales*, que son aquellos que *no* pueden ser expresados de esa forma. Por ejemplo los números $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ y $-\frac{22}{7}$ son racionales; también lo son los números enteros, ya que pueden escribirse como fracción; por ejemplo, $7 = \frac{7}{1}$. Asimismo es racional el número 0,25, porque $0,25 = \frac{1}{4}$ y también es racional el número 0,15454545454545.... porque $0,1545454545... = \frac{153}{990}$. En cambio, ya hemos visto que $\sqrt{2}$ no puede escribirse como fracción, por lo que es irracional.

Una característica importante de los números racionales es que su escritura decimal tiene, o bien una cantidad finita de dígitos (como es el caso de 0,25), o bien la expresión es infinita pero *periódica*, es decir que existe un «bloque» de cifras que a partir de algún momento se va repitiendo una y otra vez. Es el caso, por ejemplo, de $0,1545454545... = \frac{153}{990}$, que podemos escribir como $0,1\overline{54}$, o el de 0,12456456456..., que equivale a la fracción $\frac{3.111}{24.975}$, y que podemos escribir como $0,12\overline{456}$. Como se puede apreciar, sea la escritura finita o periódica, la forma decimal de un número racional puede reducirse a una cantidad finita de símbolos (0,25; $0,12\overline{456}$; etc.). En cambio, esto es imposible para los números irracionales, ya que su expresión decimal es siempre infinita y no periódica. A modo de muestra, presentamos a continuación las 200 primeras cifras decimales de $\sqrt{2}$:

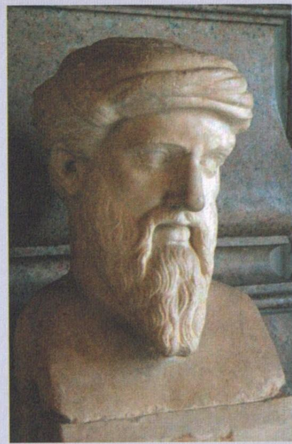
$\sqrt{2} \equiv$ 1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797
3799073247846210703885038753432764157273501384623091229702492483605
5850737212644121497099935831413222665927505592755799950501152782060
57147.

Por supuesto, dado que $\sqrt{2}$ es irracional, no se aprecia en sus cifras decimales ninguna periodicidad; de hecho *jamás* aparecerá periodicidad alguna, no importa cuántas cifras decimales se calculen.

Esta «infinitud intrínseca» de los irracionales provocó incluso que algunos matemáticos llegaran a dudar de que fuesen realmente números. Por ejemplo, en 1544, en su obra *Arithmetica Integra*, el matemático alemán Michael Stifel (1487-1567) escribió:

«Por otra parte, otras consideraciones nos compelen a negar que los números irracionales sean números en absoluto, porque cuando tratamos de someterlos

PITÁGORAS DE SAMOS Y LA ESCUELA PITAGÓRICA



Es muy poco lo que se conoce de la vida de Pitágoras, ya que las pocas referencias escritas más antiguas que se conservan son las que aparecen en la obra del matemático bizantino Proclo (411-485), que es mil años posterior.

Se sabe que el matemático griego nació en la segunda mitad del siglo VI a.C. y que falleció en la primera mitad del siglo V a.C. De joven viajó por Egipto, Mesopotamia y seguramente también por la India, y durante esos viajes estudió filosofía y geometría. Fue también entonces cuando conoció el teorema que hoy lleva su nombre pero que ya era conocido por los egipcios y los mesopotámicos desde hacía varios siglos. Dicen que Pitágoras fue el primero en hallar una demostración al famoso teorema, pero lo cierto es que no hay constancia de cómo lo hizo exactamente.

Tras su regreso, Pitágoras fundó una escuela en la isla griega de Samos, una comunidad cuyos miembros se dedicaban al estudio de la naturaleza, la filosofía y las matemáticas. Los alumnos de la escuela pitagórica seguían unas reglas de vida muy estrictas; entre otras cosas, eran rigurosamente vegetarianos porque creían que, al morir, su alma podía reencarnarse en un animal. Aunque quizá, sus tres preceptos más importantes eran los siguientes:

1) En el nivel más profundo, la naturaleza de la realidad es matemática. En otras palabras, *todo es número*.

2) La filosofía contribuye a la purificación espiritual.

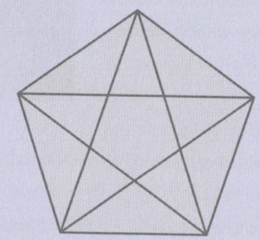
3) Los miembros de la escuela se deben entre sí completa lealtad.

Después de su muerte, y debido principalmente a razones políticas, la escuela pitagórica, con sedes en varias ciudades, fue perseguida encarnizadamente. Pero, a pesar de ello, su influencia en el pensamiento griego perduró durante siglos.

UN NÚMERO DE ORO OCULTO EN EL PENTALFA

No se sabe con certeza cuál fue el primer par de segmentos inconmensurables descubierto por los pitagóricos. Se supone que fue el formado por el lado y la diagonal de un cuadrado, lo que parece razonable, ya que la inconmensurabilidad de esos segmentos se deduce del teorema de Pitágoras. Pero existe otro par de segmentos que también compite por ese puesto.

Se trata de un par de segmentos que se hallan escondidos precisamente en el símbolo de la escuela pitagórica, el *pentalfa*, una figura como la que se muestra bajo estas líneas, y que se obtiene trazando todas las diagonales de un pentágono regular. Tal y como su nombre indica, sus cinco puntas contienen cinco letras alfa mayúsculas, una letra que se dibuja como un triángulo parecido a nuestra letra A .



Es de suponer que los pitagóricos estudiaron las propiedades geométricas de esta figura. El hecho es que tanto la diagonal como el lado del pentágono regular también son inconmensurables, pues el cociente de sus longitudes es el número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, conocido como la *razón áurea*, o el *número de oro*, candidato a ser el primer número irracional jamás descubierto. Esta *razón áurea* otorga a los rectángulos una proporcionalidad entre sus lados de 1 a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que se considera estéticamente muy agradable. Por ello los denominados *rectángulos áureos* o *dorados* aparecen en muchas esculturas, cuadros y edificios de todas las épocas.

a la numeración encontramos que huyen perpetuamente, así que ninguno de ellos puede ser aprehendido con precisión. [...] No puede llamarse un número verdadero el que es de tal naturaleza que carece de precisión. [...] Por lo tanto, así como un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, pues encubre uno infinito.»

Averiguar si un número real es o no es irracional ha sido siempre una cuestión de máxima importancia Pero aquí la pregunta que nos interesa en particular es la siguiente: ¿el número *e* es irracional?

El primero en contestar esta pregunta fue Leonhard Euler en 1748, en su mencionada *Introductio in Analysin infinitorum*, la obra en la que ya mostró la escritura del número *e* en forma de serie. Pero como la respuesta de Euler se basa en la escritura de *e* en forma de *fracción continua*, hablaremos primero de ese tema.

Las fracciones continuas o cómo averiguar si *e* es irracional

Tomaremos como ejemplo el número $1+\sqrt{2}$, que al igual que $\sqrt{2}$ es irracional y no puede escribirse como fracción. Sin embargo, podemos intentar escribir a $1+\sqrt{2}$ mediante una especie de «fracción infinita», para lo que empezaremos observando que:

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1+2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2+2\sqrt{2}+1 = 2\left(1+\sqrt{2}\right)+1$$

Es decir que, si llamamos $\alpha = 1+\sqrt{2}$, entonces se cumple que: $\alpha^2 = 2\alpha+1$.

Y si dividimos ambos miembros de esta última igualdad por α obtenemos:

$$\alpha = 2+\frac{1}{\alpha}$$

Dado que $\alpha = 2+\frac{1}{\alpha}$,podemos reemplazar la α situada a la derecha de la igualdad por $2+\frac{1}{\alpha}$:

$$\alpha = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha}}$$

Lo que podríamos hacer de forma sucesiva, reemplazando una y otra vez α por $2+\frac{1}{\alpha}$:

$$\alpha = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\alpha}}}$$

Si seguimos de ese mismo modo hasta el infinito llegaremos a:

$$\alpha = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}, \text{ es decir, } 1+\sqrt{2} = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

La expresión que aparece a la derecha de estas dos últimas igualdades se llama *fracción continua*. Generalizando este ejemplo, se dice que un número $\beta \neq 0$ está escrito como fracción continua cuando queda expresado de esta forma:

$$\beta = a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}}}$$

En esta fracción continua a_0 es un número entero (que tiene el mismo signo que β; es decir, a_0 es positivo si β lo es, y negativo si β lo es), y $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots$ son todos enteros positivos. De esta expresión de $1+\sqrt{2}$ como fracción continua podemos deducir que:

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}}$$

Como resulta muy incómodo escribir fracciones que contienen fracciones, que a su vez contienen fracciones…, para hacer más simple la expresión suele escribirse $1+\sqrt{2} = [2;2,2,2,\ldots]$ y $\sqrt{2} = [1;2,2,2,\ldots]$.

Veamos otro ejemplo de escritura como fracción continua, en este caso la del número racional $\frac{25}{7}$; para ello, antes que nada, recordaremos la validez de la siguiente igualdad: $\frac{n}{m} = \frac{1}{m/n}$. Tenemos entonces que:

$$\frac{25}{7} = 3+\frac{4}{7} = 3+\frac{1}{7/4} = 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{4}} = 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4/3}} = 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$$

En consecuencia:

$$\frac{25}{7} = 3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$$

Es decir, $\frac{25}{7} = [3;1,1,3]$; volveremos en breve a la escritura de $\frac{25}{7}$.

Hemos observado que el desarrollo como fracción continua de un número real puede ser finito o infinito; puede «detenerse después de una cantidad finita de pasos», o bien «continuar infinitamente». Una diferencia sumamente importante para el tema que nos ocupa, ya que nos demuestra que cuando la fracción continua se detiene después de una cantidad finita de pasos se trata de un número racional, mientras que si es irracional, la escritura sigue infinitamente.

Más arriba se ha constatado que la escritura en fracción continua de $\sqrt{2}$ no se detiene nunca, lo que nos demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional.

Por tanto, para saber si e es racional o irracional, lo expresaremos como fracción continua, como hizo Euler en 1748, y averiguaremos si es finita o infinita. Pero ¿cómo se calcula la expresión en fracción continua de un número β cualquiera? Para responder a esta cuestión, llamaremos $\lfloor x \rfloor$ al número entero inmediatamente menor a x; por ejemplo, $\lfloor 7{,}96 \rfloor = 7$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ y $\lfloor e \rfloor = 2$; si x es entero, entonces $\lfloor x \rfloor$ se define como el propio número x, por ejemplo, $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

De acuerdo a esta notación, diremos que los coeficientes de la escritura como fracción continua de un número $\beta \neq 0$ cualquiera se van calculando sucesivamente de este modo:

$$a_0 = \lfloor \beta \rfloor$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\beta - a_0} \right\rfloor$$

DIVIDIR POR CERO NO LLEVA A NINGUNA PARTE

Calculemos los coeficientes de la escritura como fracción continua del número $\frac{25}{7}$ usando las fórmulas dadas:

$$a_0 = \left\lfloor \frac{25}{7} \right\rfloor = \lfloor 3{,}5714\ldots \rfloor = 3 \qquad a_1 = \left\lfloor \frac{1}{\frac{25}{7} - 3} \right\rfloor = \lfloor 1{,}75 \rfloor = 1;$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{\frac{25}{7} - 3} - 1} \right\rfloor = \lfloor 1{,}333\ldots \rfloor = 1 \qquad a_3 = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{25}{7} - 3} - 1} - 1} \right\rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3.$$

Si intentáramos calcular el coeficiente a_4, la fórmula correspondiente nos obligaría a resolver la división «prohibida» $\frac{1}{0}$; por lo tanto el cálculo se detiene en el coeficiente a_3 y la escritura en fracción continua de $\frac{25}{7}$ es [3; 1, 1, 3].

Pero ¿qué quiere decir que la división $\frac{1}{0}$ esté «prohibida»? Pues significa que no hay manera coherente de asignarle un resultado. Por ejemplo, ¿por qué $\frac{15}{2} = 7{,}5$? La respuesta es «porque $2 \cdot 7{,}5 = 15$». Si $\frac{1}{0}$ tuviera como resultado un número real x, ese número debería cumplir que $1 = 0 \cdot x$; pero $0 \cdot x$ es siempre 0, nunca puede valer 1. La igualdad $1 = 0 \cdot x$ jamás puede cumplirse, por lo que $\frac{1}{0}$ no representa ningún número real o, en otras palabras, el cálculo $\frac{1}{0}$ no tiene resultado posible.

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{\beta - a_0} - a_1} \right\rfloor$$

$$a_3 = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\beta - a_0} - a_1} - a_2} \right\rfloor$$

Y así sucesivamente. Si en el cálculo de alguno de los coeficientes aparece una división por cero (una operación que en matemáticas está «prohibida») entonces el cálculo se detiene y estableceremos que el número es racional; por el contrario si eso no ocurre, el cálculo continúa hasta el infinito, lo que nos indica que el número es irracional. En el caso particular del número *e*, los primeros tres coeficientes son:

$$a_0 = \lfloor e \rfloor = 2$$

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{e-2} \right\rfloor = 1$$

$$a_2 = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{e-2} - 1} \right\rfloor = 2$$

Si se sigue de ese modo se descubre que la escritura de *e* como fracción continua tiene una regularidad muy interesante:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1, \ldots]$$

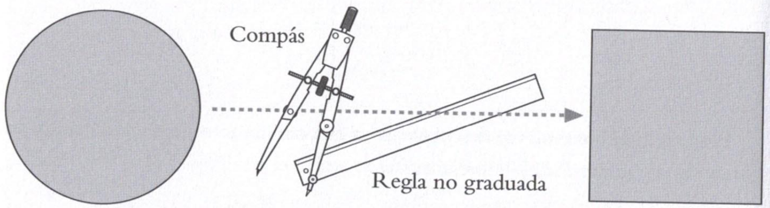
Porque después del 2 inicial sigue siempre la secuencia «1, número par, 1», y vemos que la escritura continúa infinitamente, que nunca «se detiene». Lo que nos permite responder, por fin, a la pregunta que habíamos formulado más arriba:. ¿el número *e* es irracional? Sí, lo es.

La irracionalidad de *e* se vincula directamente con el tema tratado en el capítulo 2, en el que comentamos los sucesivos cálculos de dígitos decimales de *e*. En efecto, si el número *e* fuese racional esos cálculos terminarían tarde o temprano, ya fuera porque finalizarían en un último dígito o porque se llegaría a un bloque de cifras que se repite una y otra vez. Pero, como es irracional, no importa que se hayan computado un billón o un trillón de cifras decimales. El cálculo de dígitos del número *e* nunca podrá darse por terminado.

Números algebraicos y trascendentes: el misterio de la cuadratura del círculo

Sabemos que los números reales pueden dividirse en racionales e irracionales, pero, por supuesto, ésta no es la única clasificación posible. Ahora conoceremos otra manera de clasificarlos que data del siglo XIX, pero que surgió a consecuencia de un problema mucho más antiguo planteado en la antigua Grecia hacia el siglo V a.C. Se trata del «famoso» problema de *la cuadratura del círculo*, al que aún hoy aludimos cuando afrontamos un problema que parece irresoluble. Porque el de la cuadratura del círculo, ciertamente, lo es.

Pero intentemos llegar a esa conclusión por nuestros propios medios. El problema demanda construir un cuadrado, a partir de un círculo cualquiera, usando solamente una regla no graduada y un compás. Un cuadrado que, como se aprecia en la siguiente figura, tenga exactamente la misma área que el círculo dado:



Enunciado de la cuadratura del círculo; a partir de un círculo dado hay que construir con regla no graduada y compás un cuadrado de la misma área.

Aunque a primera vista puede parecer un problema menor, desde el punto de vista del pensamiento griego resolver la cuadratura del círculo era una cuestión de máxima importancia. Y es que para los griegos las matemáticas se reducían a la geometría y, en particular, «construir» equivalía a «calcular». En este caso, construir un cuadrado con la misma área que un determinado círculo equivalía a *calcular* el área de ese círculo.

Pero ninguno de los matemáticos griegos de la Antigüedad consiguió resolver este enunciado. La cuestión de la cuadratura del círculo permaneció sin respuesta durante milenios y se transformó en uno de los problemas más famosos de la historia de las matemáticas.

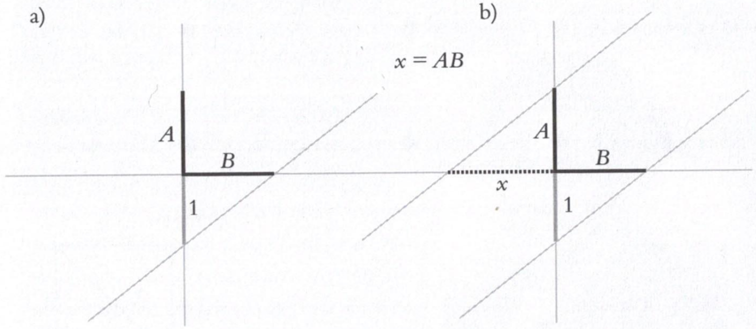
Finalmente, el enigma fue resuelto en dos partes. En la primera, desarrollada en 1837 por el matemático francés Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), el número π tuvo un lugar destacado. En la segunda, que el matemático alemán Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939) concluyó en 1882, el papel fundamental recayó en el número e. Vayamos por partes:

Para explicar lo que averiguó Wantzel, imaginemos que tenemos un círculo de radio R y que queremos construir un cuadrado de lado L que tenga la misma área. Recordemos que:

$$\text{Área del círculo} = \pi R^2$$
$$\text{Área del cuadrado} = L^2$$

Como las dos áreas deben ser iguales entonces: $L^2 = \pi R^2$. Y en consecuencia: $L = \sqrt{\pi}R$.
Concluimos entonces que el lado del cuadrado que queremos construir debe medir $\sqrt{\pi}R$. En otras palabras, dado un segmento de longitud R, el problema de la cuadratura del círculo requiere que se construya un segmento de longitud $\sqrt{\pi}R$, usando una regla no graduada y un compás.

Ya sabemos que a partir de dos segmentos de longitudes A y B, siempre es posible construir, con esos instrumentos, un tercer segmento cuya longitud sea el producto de las otras dos, es decir, un segmento de longitud $A \cdot B$, tal y como se aprecia en la figura siguiente:



En la parte a), sobre dos rectas perpendiculares trazamos segmentos de longitudes A, B *y* 1. *En la parte b), las dos rectas oblicuas son paralelas entre sí. Puede demostrarse que el segmento* x *mide* A·B.

Por lo tanto, el problema se reduce a saber si es posible construir un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$ (en ese caso, la figura nos dice cómo construir otro de longitud $\sqrt{\pi}R$). Pero ¿es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$? O, planteando la pregunta en términos más generales, ¿cuáles son exactamente los segmentos que se pueden construir con esos dos instrumentos? Pierre Laurent Wantzel halló la respuesta y descubrió que estaba relacionada con la clasificación de los números reales en *algebraicos* y *trascendentes*.

Un número real es *algebraico* cuando es la solución de una ecuación del tipo:

$$q_n x^n + \ldots + q_2 x^2 + q_1 x + q_0 = 0\,,$$

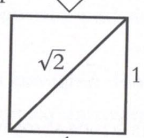
donde $q_0, q_1, q_2, \ldots$ son todos números enteros. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ es algebraico porque es la solución de la ecuación $x^2-2=0$; $\sqrt[3]{7}$ también es algebraico porque es la solución de la ecuación $x^3-7=0$; y también lo es el número $\frac{5}{3}$ porque es el resultado de la ecuación $3x-5=0$.

La definición puede extenderse a los números complejos, y así por ejemplo el número i es algebraico porque es la solución de la ecuación $x^2+1=0$. Por otra parte, un número real (o complejo) es *trascendente* simplemente cuando *no* es algebraico, es decir, si no es solución de ninguna ecuación de la forma mostrada más arriba (en breve mostraremos ejemplos de números trascendentes).

$\sqrt[3]{7}$ es solución de ➡ $x^3 - 7 = 0$ ➡ La mayor potencia de x es 3, que no es potencia de 2. ➡ No se puede construir con regla y compás.

$\sqrt{2}$ es solución de ➡ $x^2 - 2 = 0$ ➡ La mayor potencia de x es $2 = 2^1$. ➡ Es posible construirlo con regla y compás.

Por ejemplo...



Un segmento de longitud $\sqrt{2}$ puede construirse con regla y compás, por ejemplo, trazando la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Así pues, en 1837 Pierre Wantzel demostró que un segmento puede construirse con una regla no graduada y un compás sólo cuando su longitud es un número algebraico determinado que sea la solución específica de una ecuación en la que

el mayor exponente de x es una potencia de 2 (puede ser $1=2^0$, o $2=2^1$, o $4=2^2$, etcétera).

Es posible, pues, construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{2}$ porque ese número es la solución de la ecuación $x^2-2=0$, en la que la mayor potencia de x que aparece es 2. Pero es imposible hacerlo con un segmento de longitud $\sqrt[3]{7}$ porque, aunque es un número algebraico, es la solución de la ecuación $x^3-7=0$, en la que la mayor potencia de x es 3.

La cuestión es, entonces, descubrir si $\sqrt{\pi}$ es algebraico o trascendente, y en caso de ser algebraico, establecer de qué ecuación es la solución. Esta pregunta fue respondida en 1882 por Carl Louis Ferdinand von Lindemann, que demostró que:

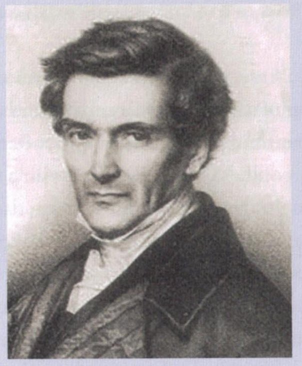
Si $\alpha \neq 0$ es un número algebraico entonces e^{α} es un número trascendente.

De este hecho se deduce que π es trascendente, lo que comprobaremos, una vez más, por el método de reducción al absurdo. Supongamos que π es algebraico.

OTROS DOS PROBLEMAS CLÁSICOS E IRRESOLUBLES

Además del problema de la cuadratura del círculo, existen otros dos famosos problemas clásicos de construcción con regla y compás que también fueron planteados hacia el siglo V a.C. y resueltos en el siglo XIX.

Uno de ellos es el problema de la duplicación del cubo, que conlleva construir, a partir de la arista de un cubo cualquiera, el lado de un cubo que tenga el doble de volumen. El otro es el problema de la trisección del ángulo, que consiste en hallar un método que permita dividir cualquier ángulo en tres partes iguales.

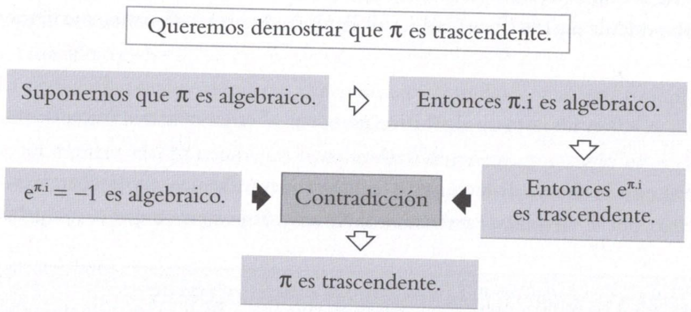


Pierre Laurent Wantzel (1814-1848).

El mencionado teorema de Wantzel demuestra que esos dos problemas son también irresolubles. Descifrar ambas cuestiones requiere construir sendos segmentos cuya longitud es un número algebraico que es la solución de una ecuación en la que la mayor potencia de x que aparece es 3.

Como hay una propiedad que dice que el producto de dos números algebraicos es otro número algebraico, deduciremos que πi también lo es.

Pero entonces, según el teorema de Lindemann, $e^{\pi i}$ sería trascendente. Sin embargo, según la fórmula de Euler (véase el capítulo 2), $e^{\pi i} = -1$, por lo que -1 sería un número trascendente. Pero esto es falso: -1 es algebraico porque es la solución de la ecuación $x+1=0$. En resumen, si π fuera algebraico entonces -1 sería trascendente. Pero como no es así, deducimos que π no es algebraico, y por lo tanto es trascendente. La siguiente figura resume este razonamiento.



Esquema de la demostración de que π es trascendente.

¿Qué sucede con $\sqrt{\pi}$? Otra demostración por el absurdo nos muestra que también es trascendente. Si fuera algebraico tendríamos que $\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \pi$ lo sería asimismo; pero sabemos que π es trascendente y que por lo tanto, $\sqrt{\pi}$ también lo es, condición que hace imposible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{\pi}$. En consecuencia, dado un círculo cualquiera, no es viable construir con esos instrumentos un cuadrado que tenga la misma área que el círculo. Así que, efectivamente, la cuadratura del círculo es una misión imposible.

El teorema de Lindemann permite demostrar que el propio número e es trascendente también de la siguiente manera:

> «Dado que el número 1 es algebraico (porque es solución de la ecuación $x-1=0$) entonces $e^1 = e$ es trascendente».

Aunque hay que decir que la trascendencia de e había sido ya demostrada en 1873, nueve años antes de la demostración del teorema de Lindemann, por el fran-

LAS FRACCIONES CONTINUAS FINITAS E INFINITAS

Hay otra manera más de demostrar que e es un número trascendente, basada en la escritura de los números reales como fracción continua.

Sabemos que la escritura como fracción continua de los números racionales es finita y que la de los irracionales es infinita. Pero en el caso de estos últimos se puede demostrar asimismo que la escritura de los números que además de irracionales son *algebraicos* es siempre periódica, mientras que la de los que son irracionales y *trascendentes* es infinita y no periódica. Por ejemplo, en el caso de $\sqrt{2}$, que es algebraico, la escritura es en efecto periódica, ya que $\sqrt{2} = [1;2,2,2,...]$ y, como se ve, hay un bloque de coeficientes (en este caso formado solamente por el número 2) que se repite una y otra vez. Pero la escritura de e como fracción continua no sólo es infinita:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, 14, 1,...]$$

Sino que además es no periódica. No puede haber un bloque de números que se repita una y otra vez porque el número par ubicado entre los dos unos va aumentando constantemente, nunca se repite. Lo que demuestra que e es trascendente.

cés Charles Hermite (1822-1901) usando técnicas de análisis matemático que escapan a los objetivos de este libro.

Tras comprobar que e es irracional y trascendente, estudiaremos otra característica que, según se conjetura, también posee el número e; una característica que se relaciona con el tema del capítulo anterior: el azar. Se trata de unos números llamados normales…pero que en realidad no lo son tanto.

Los números normales: cuando ser normal es un poco raro

El concepto de *número normal* fue concebido a principios del siglo XX por el matemático francés Émile Borel (1871-1956) y describe a un número real cuyos dígitos, en cualquier base, siguen una distribución uniforme en la que todos los dígitos son igual de probables. Para explicarlo, empezaremos poniendo un ejemplo de un número normal en base 10. Imaginemos que tenemos un dado con 10 caras (emulando el sistema decimal) numeradas del 0 al 9 y que, tras lanzarlo al azar una cantidad infinita de veces, anotamos uno a uno los números obtenidos. Pongamos que esa larga fila empezara con esta fila de números 98457701…

Un dado de 10 caras.

Y que delante de ella colocamos un número entero cualquiera seguido de una coma, por ejemplo 11,98457701… obteniendo así un número real. Pero ¿qué características tiene?

Ya hemos dicho que, dado que los dígitos se han generado aleatoriamente, no hay manera de predecir qué cifra ocupará cada lugar antes de arrojar el dado; sin embargo, es posible pronosticar cómo será globalmente el comportamiento de las cifras. Por ejemplo, si empleamos un millón, un billón o un trillón de cifras consecutivas (cuanto mayor la cantidad, más exacta la predicción), podremos vaticinar que más o menos un 10% de esas cifras serán ceros, un 10% serán unos, un 10% serán doses, etc. Y si, en ese millón o trillón de cifras, centramos nuestra atención en las *parejas* de cifras consecutivas, entonces más o menos un 1% de ellas será el par 00, un 1% será el par 01, un 1% el par 02 y así sucesivamente. Esto se debe a que, al tirar dos veces consecutivas un dado de 10 caras, la probabilidad de que salga el par 00 (o cualquier otro) es $\frac{1}{10}\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$, que equivale al 1%.

De manera similar, si en ese millón o trillón de cifras nos fijamos en ternas de cifras (conjuntos de tres cifras vinculadas), entonces más o menos el 0,1% de ellas será la terna 000, el 0,1% será la terna 001; y así sucesivamente.

Una consecuencia sorprendente es que cualquier secuencia finita de cifras, no importa lo larga que sea, aparece en la escritura de nuestro número aleatorio una infinidad de veces. Si tomamos, por ejemplo, las cifras 123456789101112131415 (con 21 dígitos), entonces esa secuencia aparece una cantidad infinita de veces en la escritura del número.

Según la definición de Borel, un número es *normal en base 10* —con el dado hemos representado esa base 10— si al escribirlo en forma decimal los dígitos que quedan tras la coma se comportan aleatoriamente; es decir, cuando forman una

secuencia finita de dígitos que aparece en la escritura del número infinitas veces, como la de la sucesión de números generada mediante las tiradas de un dado.

Pero la definición de número normal puede extenderse a cualquier base; un número será *normal en base 2*, por ejemplo, si al ser escrito en binario (escritura que sólo usa los dígitos 0 y 1) los dígitos detrás de la coma se comportan al igual que los de los números normales de cualquier otra base: como si se hubieran obtenido aleatoriamente. En este caso, como sólo hay dos dígitos posibles, el generador aleatorio puede ser simplemente una moneda en la que cara = 0 y cruz = 1, o viceversa.

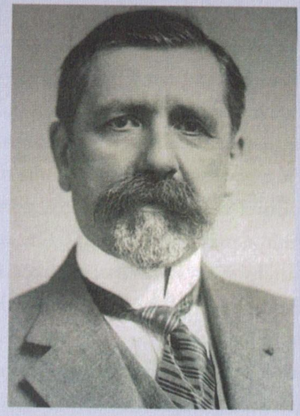
Borel definió los números normales en 1909 y demostró además que existen infinitos números normales. Sin embargo no pudo establecer ni un solo ejemplo de un número normal concreto, así que lo hizo de forma indirecta, basándose en el método de reducción al absurdo. En su razonamiento, Borel empezó suponiendo que *no* existían y, tras comprobar que eso conducía a una contradicción, dedujo que, entonces, necesariamente, sí existía una cantidad infinita de esos números llamados normales. Aunque en realidad, como hemos visto, son bastante especiales.

Todavía hoy, más de un siglo después de la demostración de Borel, hay muy pocos números que se sepa con certeza que son normales; y casi todos ellos tienen definiciones bastante «artificiosas», pensadas casi explícitamente para que el número en cuestión pueda ser definido como normal. Entre ellas, la que hicieron conjuntamente en 1945 el matemático norteamericano Arthur Herbert Copeland (1898-1970) y el matemático húngaro Paul Erdös (1913-1996), cuando demostraron que 0,2357111317192329… (cifra que se obtiene yuxtaponiendo todos los números primos, 2, 3, 5, 7, 11,…) es un número normal.

Respecto al número *e* tampoco, por el momento, se ha logrado discernir si es o no un número normal. Aunque se cree que $e, \pi, \sqrt{2}$, y otros irracionales conocidos son números normales, al momento de escribir estas líneas esa conjetura no ha sido demostrada ni refutada. El primer billón de cifras de *e* que se ha calculado (véase el capítulo 2) se comporta, en efecto, como un número normal (un 10% de ellas, aproximadamente, son ceros, un 10% son unos, etc.), pero en realidad no demuestra nada ya que detrás de ese billón hay todavía infinitas cifras de *e* que jamás podrán ser calculadas por completo. Sólo se podría demostrar que *e* es normal mediante razonamientos generales, jamás podrá lograrse calculando las cifras una a una.

Pero… ¿qué pasaría si lo fuera? Sin duda nos encontraríamos ante una circunstancia paradójica: supongamos que codificamos todos los símbolos de la escritura usando pares de cifras. Diremos, por ejemplo, que 00 es la cifra 0, 01 es la cifra 1, y así hasta 09; seguiremos después con el par 10, que puede codificar el espacio en

FÉLIX EDOUARD JUSTIN ÉMILE BOREL, UN MATEMÁTICO PRECOZ



Émile Borel nació en Saint Affrique, en los Pirineos centrales, en Francia, el 7 de enero de 1871. Toda su familia estaba relacionada con el comercio y la industria, y por ello le aconsejaron que realizara sus estudios superiores en la École Polytechnique, donde obtendría una formación orientada hacia esas actividades. Sin embargo, Borel sentía vocación por las matemáticas, la cual se reforzó gracias a uno de sus profesores del liceo, el famoso matemático francés Gastón Darboux (1842-1917). Finalmente, en 1889, Borel optó por ingresar en la École Normale, donde se impartía una sólida formación en ciencias. Borel publicó sus primeros dos trabajos de investigación en 1890 con sólo 19 años de edad. Aunque se trataba de trabajos relativamente menores, fueron muy notables dada la juventud de su autor. Publicó su primer artículo matemático de importancia en 1892, y al año siguiente obtuvo el doctorado en matemáticas.

A lo largo de su carrera Borel publicó trabajos esenciales sobre temas relacionados con las funciones de variable real, la teoría de la medida y el cálculo de probabilidades y realizó aportes de primer nivel al estudio de las consecuencias de la teoría de la relatividad de Einstein. Émile Borel falleció en París el 3 de febrero de 1956.

blanco. 11 puede ser la letra «a» minúscula, 12 la «b», 13 la «c», etc. Luego continuaremos con las vocales acentuadas, las letras mayúsculas, los signos de puntuación e inclusive con los símbolos matemáticos más usuales en las operaciones elementales. Al final, obtendríamos una codificación que nos permitiría traducir a cifras cualquier texto concebible; por ejemplo, con la secuencia de cifras 13111411100200 (es decir, 13 11 14 11 10 02 00) codificaríamos la expresión «cada 20».

Queda claro que, usando esta codificación, *cualquier texto concebible* se puede transformar en una secuencia finita de cifras; y si *e* es normal, esa secuencia de cifras aparecerá necesariamente en su escritura decimal una infinidad de veces. Lo que significa que, si *e* resulta ser normal, cualquier texto que se haya escrito o que se escriba en el futuro podría aparecer codificado en su expresión decimal: las obras

completas de Gabriel García Márquez, las obras perdidas de Esquilo, todas las novelas que se escribirán a lo largo del siglo XXI... ¿se imaginan la Biblioteca de Borges totalmente codificada en un simple número?

Bajo este supuesto, *todos* los textos pueden estar contenidos en la escritura de *e*. También el texto completo de este mismo libro. Rayando en el absurdo, *e* contendría el texto de su propia definición, y asimismo la explicación de por qué lo contiene.

Capítulo 5

El número *e* y el cálculo

El *análisis matemático*, también llamado *cálculo diferencial* o simplemente *cálculo*, fue desarrollado a finales del siglo XVII de manera simultánea e independiente por Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz. Sin embargo, sus trabajos no habrían sido posibles sin las aportaciones de una larga lista de precursores que se remonta hasta el mismísimo Arquímedes, que vivió en el siglo III a.C.

Aunque en la época de Newton y Leibniz las aplicaciones del cálculo estaban muy restringidas al estudio de los fenómenos físicos y astronómicos, con el tiempo sus usos se fueron diversificando de tal modo que hoy es, quizá, la rama de las matemáticas que más utilidades tiene, tanto en la ingeniería como en casi todas las ciencias.

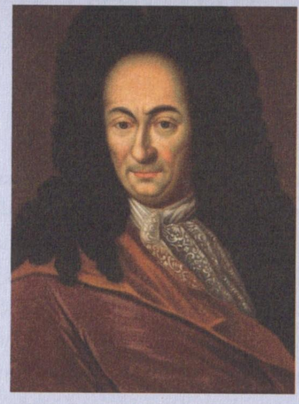
En este capítulo hablaremos de algunos de los conceptos fundamentales del cálculo y del papel destacado que juega aquí, una vez más, el número *e*. Y empezaremos revisando nuevos aspectos de las funciones, objeto principal de estudio de este procedimiento matemático.

Las funciones, más a fondo

Una función es una regla que a cada número t le asigna otro número, que podemos llamar y. Existen muchas maneras de establecer este vínculo; por ejemplo, podríamos decir, simplemente, que la función le asigna a cada número racional un 1 y a cada irracional un 0. Sin embargo, en la mayoría de los casos relativos al cálculo, las funciones suelen expresarse mediante fórmulas. En el caso de la fórmula $y = 20t - 5t^2$, la función le asigna, a cada número t, un número y que se obtiene reemplazando a t en esa expresión. Por ejemplo, a $t = 1$ la función le asigna el número $y = 20 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 15$.

Pero ¿para qué «sirve» una fórmula como la que acabamos de describir? Ya mencionamos el tema cuando hablamos del crecimiento de las poblaciones de bacterias o del decaimiento de las sustancias radiactivas en el capítulo 2: una función sirve para describir cuantitativamente una gran diversidad de fenómenos y, sobre todo, para predecir cómo será la evolución futura de los mismos.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, LA AMBICIÓN DE CONOCIMIENTO GLOBAL



Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, Sajonia, en la actual Alemania, el 1 de julio de 1646. En 1661, a los catorce años de edad, ingresó en la Universidad de Leipzig, donde estudió filosofía y matemáticas. A lo largo de toda su vida Leibniz persiguió el difícil propósito de recopilar todo el conocimiento humano, y por ese motivo también estudió leyes (se doctoró en esta área en 1667), además de física, latín, griego y hebreo.

Leibniz publicó su primer trabajo sobre cálculo diferencial en 1684 bajo el título «Nuevo método para máximos y mínimos», un texto que contenía todas las herramientas esenciales del cálculo pero que, sin embargo, no justificaba la validez de esas reglas. Por ello, Jakob Bernoulli comentó que el trabajo de Leibniz «más que una explicación, era un enigma».

Newton, que había desarrollado el procedimiento del cálculo en 1671 aunque no lo publicó hasta 1687, acusó a Leibniz de haberle robado sus ideas. Esto desató una larga disputa entre ellos en la que muchos matemáticos tomaron parte. A Leibniz, esta contienda le exigía cada vez más tiempo y acabó por amargarle sus últimos años de vida. Hoy en día, sin embargo, se acepta sin reservas que los dos desarrollaron el cálculo contemporáneamente y de manera independiente.

Leibniz falleció en Hanóver, actualmente en Alemania, el 14 de noviembre de 1716.

Comprobemos esta idea con la fórmula $y = 20t - 5t^2$, en la que, asumimos que t sólo puede tomar valores comprendidos entre 0 y 4. ¿Qué fenómeno físico puede ser descrito por esta función? Una respuesta posible es la siguiente: imaginemos que, usando un mecanismo similar a un cañón de aire comprimido, disparamos una pelota directamente hacia arriba; la pelota, por supuesto, llegará hasta una cierta altura máxima y luego volverá a caer. Si el disparo inicial tiene la fuerza conveniente, entonces la función $y = 20t - 5t^2$ puede ser aquella que describe la altura que va alcanzando la pelota a lo largo de su movimiento. En otras palabras, a cada instante t de tiempo (en este caso está medido en segundos) la fórmula le asigna la altura

y a la que se encuentra la pelota en ese momento, que expresamos en metros. Por ejemplo, a $t = 0$ la fórmula le asigna el valor $y = 20 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 = 0$, lo que significa que en el instante inicial la pelota está a nivel del suelo; por otra parte, a $t = 1$ la fórmula le asigna el valor $y = 20 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = 15$, que equivale a decir que, exactamente un segundo después de haber sido lanzada, la pelota está a 15 metros de altura.

¿Qué más nos dice esta fórmula acerca del movimiento de la pelota? Para contestar esta pregunta, recordaremos que cada función tiene asociada una curva, que se denomina su *gráfico*. Esta curva está formada por todos los puntos del plano en los que la segunda coordenada es el resultado de aplicar la función a la *primera* coordenada. En el caso de $y = 20t - 5t^2$, como la función le asigna a $t = 1$ el valor $y = 15$, entonces el punto de coordenadas (1,15) pertenece a su gráfico. A continuación vemos el gráfico completo de la función; en el eje horizontal se representan los posibles valores de t (que hemos establecido que están entre 0 y 4) y en el eje vertical, los posibles valores de y.

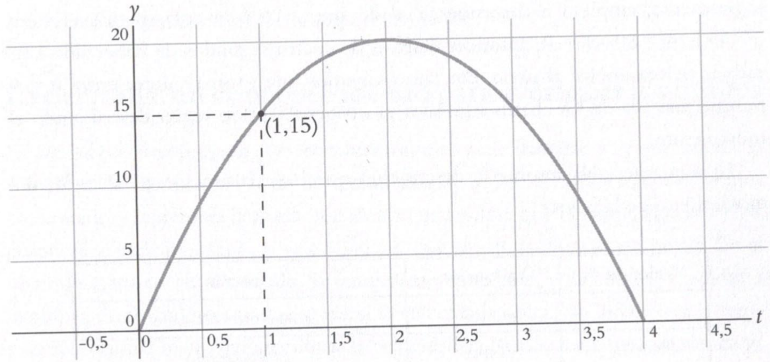
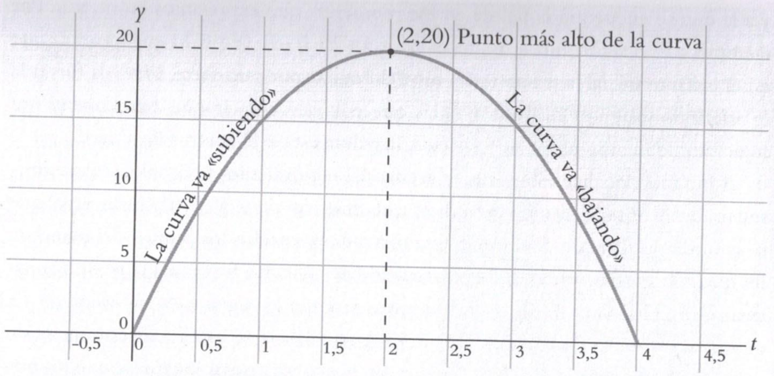


Gráfico de la función y = 20t−5t²; en él hemos marcado el punto de coordenadas (1,15).

El gráfico nos ayuda a analizar «qué nos dice» la función acerca del movimiento de la pelota. Vemos que, a medida que t va aumentando entre 0 y 2, la curva va «subiendo», lo que significa que, tras ser lanzada, en el intervalo de tiempo entre 0 y 2 segundos la pelota asciende hasta alcanzar su altura máxima. Eso sucede en el instante $t = 2$, o sea, dos segundos después del disparo. Como a $t = 2$ le corresponde $y = 20$, esa altura máxima es de 20 metros.



Para t *entre 0 y 2 la curva «sube», para* t *entre 2 y 4 la curva «baja».*
En t = 2 *la curva alcanza su altura máxima.*

Para t entre 2 y 4 la curva «baja»; tras alcanzar su altura máxima, la pelota, lógicamente, empieza a descender. Y dado que a $t=4$ le corresponde el valor $20\cdot4-5\cdot4^2=80-80=0$, entonces después de cuatro segundos de haber sido lanzada la pelota vuelve al suelo. Por tanto sabemos que t toma valores entre 0 y 4, porque más allá de los cuatro segundos ya no tiene sentido seguir describiendo el movimiento.

La siguiente tabla resume la descripción que hace la función $y=20t-5t^2$ del movimiento de la pelota:

Valor de t	La función	La pelota...
0	Vale $y = 0$	...está a nivel del suelo
Entre 0 y 2	Crece	...va subiendo
2	Vale $y = 20$	...alcanza su altura máxima
Entre 2 y 4	Decrece	...va bajando
4	Vale $y = 0$	...vuelve al nivel del suelo

Supongamos ahora que la función $y=30+t-t^2$ describe la temperatura ambiente de una ciudad X. La mide en grados centígrados en las horas que oscilan entre el mediodía y las 3 de la tarde de un determinado día del pasado verano. Exactamente, t indica la cantidad de horas que transcurren desde el mediodía, por lo que t varía

entre 0 y 3. Así, por ejemplo, para $t=0$ la función nos da la temperatura ambiente a las 12, que es de 30 °C porque $y=30+0-0^2=30$; si $t=2$ obtenemos la temperatura a la 2 de la tarde, que en este caso es de 28 °C porque $y=30+2-2^2=28$.

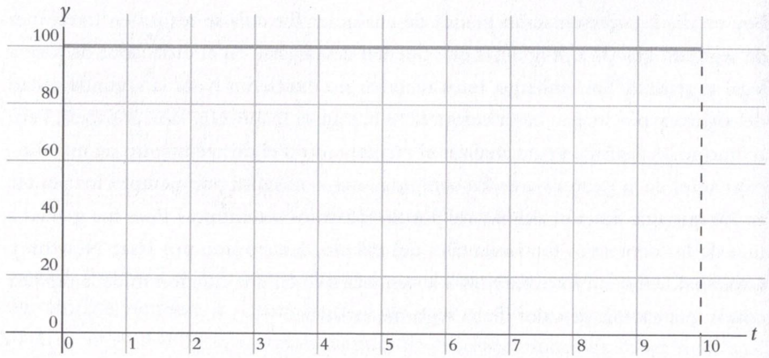
Basándonos en el análisis del ejemplo anterior podemos preguntarnos en qué intervalo de tiempo entre las 12 y las 3 de la tarde la temperatura ha aumentado o ha disminuido, o cuáles fueron las temperaturas máxima y mínima. Para saberlo resultaría muy útil trazar un gráfico de la función, pero ¿cómo se dibuja? En realidad, hoy en día la representación gráfica de cualquier fórmula se realiza en fracciones de segundo gracias a programas que pueden descargarse en el ordenador de forma legal y gratuita. Sin embargo, estos recursos no existieron hasta la segunda mitad del siglo XX por lo que hasta entonces se hacían «a mano, con lápiz y papel». Pero ¿cómo se las apañaban para analizar el crecimiento o el decrecimiento de una función antes de la existencia de las computadoras, o calcular, por ejemplo, los puntos en los que una función alcanza sus puntos máximos o mínimos? Pues fue gracias a uno de los conceptos fundamentales del cálculo, desarrollado por Isaac Newton y Gottfried Leibniz. Nos referimos a la *derivada*, que en una función mide la rapidez con la que cambia de valor dicha regla matemática.

La derivada: un concepto ideado para averiguar los límites

La *derivada* de una función y, es otra función que suele llamarse y', y que calcula la velocidad de crecimiento o de decrecimiento de y. Por ejemplo si, como hemos comentado, y representa la altura que alcanza una pelota que es lanzada hacia arriba, entonces y' indicará cuál es la velocidad a la que se está moviendo esa pelota. En el segundo ejemplo, en el que y es la temperatura ambiente, y' calcula la velocidad a la que va cambiando esa temperatura: si la velocidad es alta, eso indica que la temperatura cambia muy rápidamente, si la velocidad es baja, lo hace muy lentamente.

Si y ha sido dada por una fórmula, lo mismo sucederá con y'; pero ¿cómo se obtiene la derivada de y? ¿Cuáles son las reglas para calcularla? Newton y Leibniz fueron los primeros en saberlo. A continuación indicaremos algunas de estas reglas; empecemos por la primera, que trata de las funciones constantes.

Supongamos que y es una función constante, que asigna siempre el mismo número a todos los valores de t. En consecuencia, una función puede ser útil, por ejemplo, a la hora de medir la temperatura del agua en ebullición. En efecto, mientras el agua hierve su temperatura permanece a 100 °C de forma constante (asumimos que es agua destilada sometida a una atmósfera de presión). Por lo tanto, si definimos a y como la función que a cada instante t le asigna la temperatura que tiene el agua en ebullición en ese momento, entonces la función se define así: $y = 100$; en otras palabras, a *todo* valor de t la función le asigna el valor 100. La siguiente figura muestra su gráfico, suponiendo que t varía entre 0 y 10, lo que implica que el agua hierve durante 10 minutos).



Función constante que a cada valor de t, entre 0 y 10, le asigna el valor 100. Su gráfico es una recta horizontal.

Las principales reglas para hallar derivadas

Una función constante no crece ni decrece *per se*. Su velocidad de crecimiento o de decrecimiento es 0, lo que en términos de la derivada, se traduce en la siguiente regla:

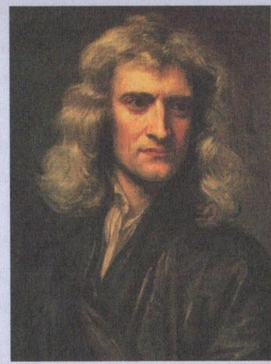
Regla 1: Si y es constante entonces $y' = 0$.

Tomemos ahora la función $y = 2t$, que a cada número le asigna su doble.

¿Cuál es su velocidad de crecimiento? Para averiguarlo confeccionaremos la siguiente tabla, indicando diferentes valores de t junto con los números asignados por dicha función:

t	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	4	6	8	10	12

ISAAC NEWTON, UNO DE LOS MÁS GRANDES



Isaac Newton nació en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra, en la Navidad de 1642 según el calendario juliano. En aquel tiempo, Inglaterra, a diferencia de casi todo el resto de Europa, no había adoptado todavía el calendario gregoriano, que es el que se usa actualmente en todo el mundo, y no lo haría hasta 1752. Así pues, traducida al calendario moderno, la fecha del nacimiento de Isaac Newton es el 4 de enero de 1643.

Junto con Gauss y Arquímedes, Newton es considerado uno de los tres matemáticos más grandes de todos los tiempos. Su mayor aportación a esta ciencia fue la creación del cálculo y su aplicación a la resolución de infinidad de problemas; sin embargo, fueron sus trabajos de física los que inscribieron su nombre en letras de oro en los anales de la ciencia. Su obra *Principios matemáticos de filosofía natural* (más conocida como *Principia*), considerado el mayor trabajo científico individual de la historia, incluye tres temas fundamentales: las tres leyes del movimiento, la ley de gravitación universal, y valiosas aportaciones sobre la estructura del sistema solar.

El científico falleció en Londres el 31 de marzo de 1727, según el calendario gregoriano, y fue enterrado en la abadía de Westminster. Muy cerca, se erige el monumento a Newton, en cuyo pedestal reza un larguísimo epitafio. He aquí un fragmento: «Caballero que con fuerza mental casi divina demostró él primero, con su resplandeciente matemática, los movimientos y figuras de los planetas [...] Intérprete laborioso, sagaz y fiel de la Naturaleza [...] Dad gracias, mortales, porque ha existido».

Imaginemos que t, como en los ejemplos anteriores, representa el tiempo, medido en segundos. La tabla anterior nos muestra que cuando el tiempo pasa de 0 a 1, el valor de y aumenta dos unidades, de 0 a 2, y cuando el tiempo pasa de 1 a 2 el valor de y aumenta dos unidades más, de 2 a 4.

En resumen, a cada segundo la función aumenta siempre dos unidades, por lo que podemos afirmar que la velocidad de cambio de y es constante e igual a 2. En términos de la derivada esto nos dice que si $y = 2t$ entonces $y' = 2$. Este hecho se generaliza en la siguiente regla:

Regla 2: Si $y = Ct$, donde C es un número cualquiera, entonces $y' = C$.

Tomemos ahora la función $y = t^2$; esta fórmula podría describir la distancia que recorre una piedra que se deja caer verticalmente. Desarrollaremos este ejemplo en un supuesto planeta con una gravedad menor a la terrestre para obviar la resistencia del aire y mediremos el tiempo en segundos y la distancia, en metros. Nos referimos a la *distancia* recorrida por la piedra, y no a la *altura* de la que cae. Son cuestiones distintas, porque cuando la piedra cae el valor de la altura *disminuye* mientras que la distancia recorrida *aumenta*.

Tanto en el caso del agua en ebullición como en el de la función $y = 2t$ la velocidad de cambio de la función era o bien nula, o bien constante, lo que simplifica enormemente el cálculo de la derivada. Sin embargo, en este nuevo ejemplo la velocidad de cambio varía a cada instante porque la piedra se mueve cada vez más rápidamente. Por ello, el cálculo de la derivada es más complicado.

Antes de empezar a calcular, por ejemplo, cuál es la velocidad de la piedra justo 3 segundos después de haber sido soltada, definiremos qué es la velocidad. En el caso de un automóvil que tarda 2 horas en recorrer una distancia de 160 kilómetros, podríamos decir que el vehículo viajó a 80 km/h, ya que la velocidad es el resultado de comparar la distancia recorrida con el tiempo que ha tardado en recorrer esa distancia:

$$\text{Velocidad} = \frac{160\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 80\,\text{km/h}$$

Generalizando esta relación podríamos establecer que:

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

Pero ¿y si el automóvil no ha viajado todo el tiempo a la misma velocidad? Tal vez al comienzo del viaje fue más rápido y luego más lento, o viceversa. Por tanto, la relación

$$\text{Velocidad} = \frac{160\ \text{km}}{2\ \text{h}} = 80\,\text{km/h}$$

nos da una velocidad promedio, pero no nos permite saber cuál fue la velocidad del coche en cada instante. ¿Cómo podríamos saber a qué velocidad iba veinte minutos después de haber iniciado su viaje? O, volviendo al ejemplo anterior, ¿cómo podemos calcular la velocidad de la piedra en el instante $t = 3$? No se trata de obtener la

velocidad promedio a lo largo de todo un intervalo de tiempo, sino de averiguar la velocidad exacta en un momento determinado. ¿Cómo podemos vincular la expresión que busca averiguar la velocidad a lo largo de un lapso de tiempo transcurrido, con el cálculo de la velocidad en un simple instante, en el que «tiempo transcurrido» es 0?

El modo de hacerlo consiste en calcular primero la velocidad, en el intervalo que va, por ejemplo, de los 3 a los 3,1 segundos; luego la del lapso comprendido entre 3 y 3,01 segundos, después entre 3 y 3,001 segundos, y así sucesivamente. Es decir, calcularemos la velocidad a lo largo de intervalos de longitud cada vez menor, hasta lograr que el lapso de tiempo transcurrido se reduzca a 0: hasta que se transforme en un único instante. Siguiendo esta idea, la tabla siguiente muestra las velocidades de la piedra para intervalos de tiempo cada vez más «cercanos» al instante «3 segundos»:

Instante inicial del intervalo	Instante final del intervalo	Tiempo transcurrido	Posición en el instante inicial	Posición en el instante final	Distancia recorrida	Velocidad en ese intervalo
3 seg	3,1 seg	0,1 seg	9 m	9,61 m	0,61 m	6,1 m/s
3 seg	3,01 seg	0,01 seg	9 m	9,0601 m	0,0601 m	6,01 m/s
3 seg	3,001 seg	0,001 seg	9 m	9,006001 m	0,006001 m	6,006001 m/s
3 seg	3,0001 seg	0,0001 seg	9 m	9,00060001 m	0,00060001 m	6,0001 m/s

Velocidad = Distancia recorrida / Tiempo transcurrido.

Si miramos la última columna de la tabla vemos que, a medida que el lapso de tiempo se reduce, la velocidad calculada se acerca cada vez más a los 6 m/s. En efecto, puede demostrarse matemáticamente que este valor, 6 m/s, es exactamente la velocidad de la piedra a los 3 segundos de haber sido soltada. El razonamiento que acabamos de esbozar puede generalizarse para demostrar que si $y = t^2$ entonces $y' = 2t$ (nótese que para $t = 3$ el valor que se obtiene es, en efecto, 6).

El razonamiento anterior queda resumido en la regla n.º 3:

Regla 3: Si $y = Ct^2$, donde C es un número cualquiera, entonces $y' = 2Ct$.

Si la piedra se hubiera dejado caer en la Tierra (y no en un planeta con una gravedad menor) entonces la función que calcula la distancia recorrida en cada instante debería tener en cuenta la resistencia del aire. Esa función está representada por $y=5t^2$ (en realidad sería más exacto decir que $y = 4{,}9t^2$ pero se acepta redondear a 5) y su derivada, según la regla indicada más arriba, es $y'=2\cdot 5t=10t$.

En caso de que nos enfrentemos a potencias mayores de t, un desarrollo similar al que acabamos de mostrar permite deducir que:

Regla 4: Si $y = Ct^3$, entonces $y'=3Ct^2$.
Regla 5: Si $y = Ct^4$, entonces $y'=4Ct^3$.
Regla 6: Si $y = Ct^5$, entonces $y'=5Ct^4$.
Y así sucesivamente…

Pero volvamos ahora al caso de la pelota que es lanzada verticalmente hacia arriba, y al de la temperatura de cierto día del verano anterior, y analicemos ambos ejemplos usando la «herramienta matemática» que acabamos de introducir.

OTRAS REGLAS PARA HALLAR DERIVADAS

En el texto hemos mostrado solamente algunas de las muchas reglas de derivación que existen. Una de las reglas no mencionadas es la que se refiere al producto de dos funciones; y que dice que si y_1 e y_2 son dos funciones cualquiera entonces la derivada de su producto se calcula así:

$$(y_1y_2)' = y_1(y_2)' + (y_1)'y_2$$

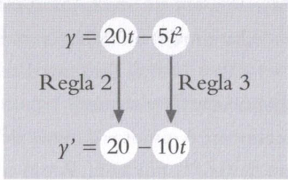
Así, si para la función $y = t$ vale que $y' = 1$, podemos deducir de una manera diferente a la citada cuál es la derivada de $y = t^2$. En efecto:

$$(t^2)'=(t\cdot t)'=t\,(t)'+(t)'\,t=t\cdot 1+1\,t=t+t=2t.$$

Otra regla nos dice que la derivada de la suma (o la resta) de dos funciones es la suma (o la resta) de sus respectivas derivadas. Por ejemplo, la derivada de $y=t^2+t$ es $y'=2t+1$.

Recordemos que la fórmula que calcula la altura de la pelota en cada uno de los momentos comprendidos entre los 0 y 4 segundos tras su lanzamiento es $y=20t-5t^2$. Y que el gráfico de la función nos había mostrado que, tras ser lanzada, la pelota va subiendo durante los dos segundos siguientes, instante en el que la pelota alcanza su altura máxima e inicia su descenso hasta llegar de nuevo al suelo. ¿Cómo refleja la derivada esta sucesión de hechos?

Comencemos observando que, según la regla 2, la derivada de $20t$ es 20 y que la de $5t^2$ es $10t$ conforme a la regla 3. Así pues, para $y=20t-5t^2$, la derivada es $y'=20-10t$.



Para todos los valores de t entre 0 y 2, la fórmula $y'=20-10t$ da siempre valores positivos; por ejemplo, para $t=1$ la derivada vale 10, lo que nos indica que la velocidad de la pelota en ese instante es de 10 m/s. Cuando la derivada es positiva la función es creciente, lo que significa que, como vimos en el gráfico, la pelota sube.

En cambio, en $t=2$ la derivada vale $20-10\cdot 2=0$, y esto nos dice que la velocidad en ese preciso instante es 0. En efecto, cuando la pelota llega a su altura máxima se detiene por un instante y luego comienza a caer.

Por último, para todos los valores de t entre 2 y 4, la derivada es negativa; por ejemplo, para $t=3$ la derivada vale $20-10\cdot 3=-10$, y por tanto la velocidad de la pelota en ese momento es de -10 m/s. El signo negativo indica que la función es decreciente y que durante todo ese intervalo, la pelota va descendiendo. La siguiente tabla resume este análisis:

Valor de t	La derivada	La pelota…
Entre 0 y 2	Es positiva	…va subiendo
2	Vale 0	…alcanza su altura máxima
Entre 2 y 4	Es negativa	…va bajando

¿Qué podemos decir con respecto al ejemplo de la temperatura medida entre el mediodía y las 3 de la tarde? Recordemos que en este caso la fórmula es $y=30+t-t^2$ y su derivada es $y'=1-2t$ (la derivada de 30 es 0 según la regla 1, la derivada de t es 1 por la regla 2 y la de t^2 es $2t$ conforme la regla 3).

Si en el ejemplo de la pelota, ésta alcanza su altura máxima en el momento en que la derivada vale 0, en el caso de la temperatura sucede igual: su máximo valor se da cuando la derivada es igual a 0, lo que sucede cuando $t = 0{,}5$ (en efecto, para ese valor de t sucede que $y'=1-2\cdot 0{,}5=0$). En otras palabras, durante el lapso de tiempo comprendido entre el mediodía y las 3 de la tarde la temperatura más alta se registró a las doce y media (0,5 horas después del mediodía), y fue de $y=30+0{,}5-0{,}5^2=30{,}25\,°C$.

Cuando el valor de t se halla entre 0 y 0,5 la derivada es positiva; por ejemplo, para $t=0{,}1$ sucede que $y'=1-2\cdot 0{,}1=0{,}8$. Esto nos dice que durante ese intervalo la temperatura ha ido aumentando. Como que 0,1 de hora equivale a 6 minutos, podemos deducir que, exactamente 6 minutos después del mediodía, la temperatura fue aumentando a un ritmo de 0,8 °C por hora. Por el contrario, para t entre 0,5 y 3 la derivada es negativa, lo que nos dice que en ese intervalo de tiempo la temperatura fue decreciendo:

Valor de t	La derivada	La temperatura...
Entre 0 y 0,5	Es positiva	...va subiendo
0,5	Vale 0	...alcanza su valor máximo
Entre 0,5 y 3	Es negativa	...va bajando

La figura siguiente nos muestra el gráfico de la función temperatura, el cual puede trazarse a partir de la información de la tabla.

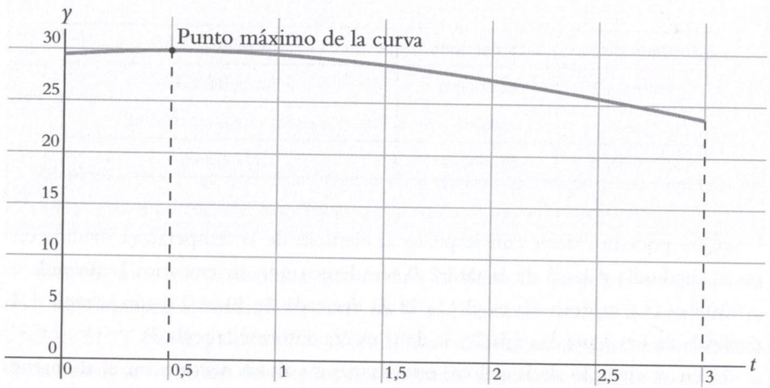


Gráfico de la función $y = 30 + t - t^2$ con t entre 0 y 3.

A pesar de que los dos fenómenos que hemos analizado son de naturaleza completamente diferente (uno trata del lanzamiento de una pelota, y el otro, de la temperatura ambiente), el análisis matemático de ambos ha sido muy parecido. Esta similitud revela la verdadera potencia de las matemáticas en general, y del cálculo en particular: una vez que se conocen las reglas para realizar operaciones matemáticas, como por ejemplo, las reglas para derivar funciones, éstas sirven para estudiar cualquier tipo de fenómeno, no importa cuál sea su naturaleza, siempre y cuando pueda ser descrito matemáticamente.

La función exponencial: el vínculo con el número e

Ahora daremos un paso adelante y veremos cómo todo lo anterior tiene relación con el número e. Para ello, consideraremos la función exponencial $y=e^t$, donde t puede ser reemplazada por cualquier número real, y calcularemos la derivada de esta función.

Recordemos que, según vimos en el capítulo 2, esta función puede escribirse de la siguiente manera:

$$e^t=\frac{1}{0!}+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots$$

Y que puede también expresarse así:

$$e^t=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+\frac{1}{120}t^5+\cdots$$

Si aplicamos sucesivamente todas las reglas anteriores obtenemos que:

$$y'=0+1+\frac{1}{2}2t+\frac{1}{6}3t^2+\frac{1}{24}4t^3+\frac{1}{120}5t^4+\ldots$$

$$y'=1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{24}t^4+\cdots$$

$$y'=\frac{1}{0!}+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots$$

$$y'=e^t$$

Es decir, que la derivada de $y=e^t$ es $y'=e^t$; o lo que es lo mismo: la derivada de la función exponencial es la *misma función*.

¿Qué consecuencias tiene este hecho? Por una parte, como e^t es siempre un número positivo y en consecuencia, y' también lo es, la función es todo el tiempo creciente. Más aún, el crecimiento se va retroalimentando, porque la función y la derivada coinciden. Cuanto mayor es el valor de la función, mayor es la velocidad de crecimiento, lo que a su vez provoca un aumento de la función, que acelera aún más la velocidad de crecimiento, y así sucesivamente. Esta retroalimentación explica por qué la función exponencial crece, tal como comentamos en el capítulo 2, de manera irrefrenablemente «explosiva». La figura siguiente muestra el gráfico de esta función:

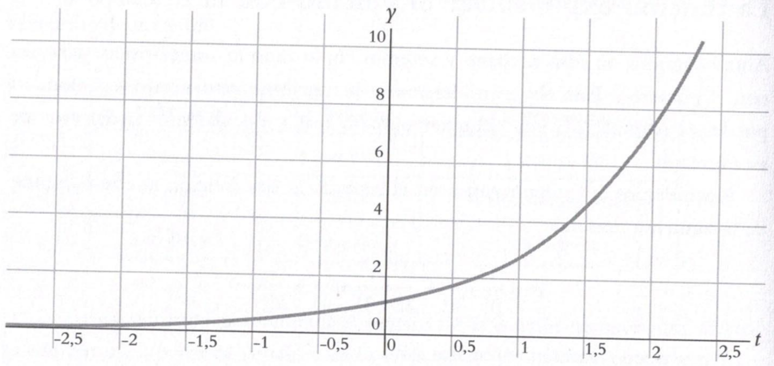


Gráfico de la función $y = e^t$.

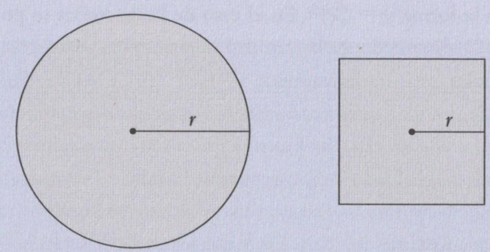
La función $y = e^t$ es prácticamente la única que coincide con su derivada, ya que todas las demás son sólo variantes de ésta. Como las de la forma $y = Ce^t$, donde C es un número cualquiera; como por ejemplo $y = 2e^t$, $y = -3e^t$ o $y = 0{,}2e^t$.

En el capítulo 2 denominamos *exponenciales* a un tipo más amplio de funciones, aquellas del tipo $y = Ce^{kt}$, donde k y C son constantes. Pero ¿qué sucede con la derivada de estas funciones?

Un razonamiento similar al planteado para $y = e^t$ permite demostrar que si $y = Ce^{kt}$ entonces su derivada tiene la misma fórmula, pero multiplicada por la constante k. Es decir, para $y = Ce^{kt}$ se cumple que $y' = kCe^{kt} = ky$. De hecho, las *únicas* funciones que satisfacen la igualdad $y' = ky$ son todas de la forma $y = Ce^{kt}$. Así, por ejemplo, las únicas funciones que cumplen la igualdad $y' = 3y$ son todas las del tipo $y = Ce^{3t}$ (entre ellas, $y = 2e^{3t}$, $y = 7e^{3t}$ o $y = -3e^{3t}$).

¿SÓLO UNA CURIOSIDAD?

La fórmula $A = \pi r^2$ es una función que a cada valor positivo de r le asigna el área del círculo que tiene ese radio. Su derivada es $A' = 2\pi r$, que es la función que calcula la longitud de la circunferencia de radio r. ¿Es este hecho una rara coincidencia? Pues no. Hay una razón de peso para que se cumpla que «la derivada del área del círculo es su perímetro». Veamos cuál es.



Imaginemos un círculo formado por una cantidad infinita de circunferencias concéntricas «pegadas unas a otras»; esta idea nos dice que a medida que el radio aumenta, al área del círculo se le van agregando nuevas circunferencias. Por lo tanto, la velocidad a la que va aumentando el área está dada por lo que miden esas circunferencias añadidas. En otras palabras, tal como queríamos demostrar, la derivada del área está dada por las longitudes de las circunferencias. Lo mismo sucede con el cuadrado de la imagen, con un valor r determinado. En este caso el área es $A = (2r)^2 = 4r^2$ mientras que su derivada $A' = 8r$, es el perímetro de la figura. Lo mismo sucede con cualquier polígono regular, cuando r equivale al valor de su apotema (la menor distancia entre el centro de un polígono y cualquiera de sus lados).

También podemos imaginar una esfera formada por una cantidad infinita de superficies esféricas concéntricas «pegadas unas a otras» y en consecuencia, según el razonamiento que acabamos de argumentar, la derivada del volumen de una esfera debería ser igual al área de su superficie. Y, en efecto, así es: el volumen de la esfera se calcula como $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, y su derivada es $V' = 4\pi r^2$, que calcula el área de su superficie.

Este hecho nos permite analizar desde un nuevo punto de vista el ejemplo relacionado con el crecimiento de las poblaciones de bacterias. Dijimos que, en condiciones de espacio vital y de alimento ilimitado, las poblaciones de bacterias aumentan a una velocidad que es, en cada instante, un porcentaje fijo de la población presente en ese momento. Pongamos que, como en aquella ocasión, ese porcentaje es del 20%, y que y es la función que en cada instante nos da la cantidad de bacterias presentes. El hecho de que la velocidad de crecimiento de la población sea siempre del 20% se expresa matemáticamente de esta forma:

$$y' = 0{,}2y.$$

Ahora bien, como dijimos más arriba, las únicas funciones que cumplen esta relación son de la forma $y = Ce^{0{,}2t}$. En el caso de las bacterias se puede demostrar que el valor de C sólo puede ser la cantidad inicial de bacterias existente, lo que se debe a que al valor $t=0$ le corresponde $y = Ce^{0{,}2 \cdot 0} = Ce^0 = C$. En otras palabras, la igualdad $y' = 0{,}2y$ nos dice que la cantidad de bacterias en condiciones de infinidad de recursos sólo puede ser descrita por una única función exponencial.

Por otra parte, la igualdad $y' = 0{,}2y$ representa también la evolución de un capital invertido a un 20% de interés compuesto, así como cualquier otra cantidad que crezca a una tasa constante del 20%. En todos los casos, la función que describe el fenómeno es necesariamente exponencial.

Las ecuaciones diferenciales: la física expresada matemáticamente

Una igualdad como $y' = 0{,}2y$, que expresa la relación que existe entre una función y su derivada, se llama *ecuación diferencial*. Las ecuaciones diferenciales son una herramienta esencial para traducir al lenguaje matemático las leyes de la física, de la biología, de la química, etc., ya que casi todas esas leyes (como en el caso de las bacterias) se expresan mediante la relación que existe entre una cantidad y su velocidad de crecimiento.

Es importante mencionar que algunas de esas leyes naturales expresan la relación que existe entre una cantidad y su *aceleración*, que es la *velocidad a la que varía la velocidad*. Observemos que si y' es la velocidad de variación de y, entonces la variación de y' (la variación de su velocidad, o aceleración) es $(y')'$, que suele escribirse y'' y se llama *derivada segunda* de y.

Por ejemplo, de las leyes de Newton se deduce que si se deja caer una piedra sin que se tome en cuenta la resistencia del aire, éste caerá con una aceleración constante. En la Tierra esa aceleración es de aproximadamente $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ (más exactamente es $9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, pero es aceptable redondearla a 10). Si llamamos y a la distancia que recorre la piedra, el hecho de que la aceleración sea constantemente igual a g se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' = g.$$

Si suponemos que en el momento de soltar la piedra, ésta no ha recorrido todavía ninguna distancia, y si, además, simplemente la dejamos caer sin transmitirle ningún impulso adicional, la ecuación diferencial permite deducir que la distancia recorrida es

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = 5t^2,$$

LA CAÍDA DE UN PARACAIDISTA

Hemos hablado de cómo se describe matemáticamente la caída de un objeto sin tener en cuenta la resistencia del aire, lo que resulta razonable cuando se trata de la caída de una piedra. Pero si el que cae es un paracaidista entonces la resistencia del aire pasa a ser un factor que no puede ser ignorado. En este caso, la ecuación diferencial que expresa la *velocidad* a la que cae el paracaidista (a la que llamaremos v) es:

$$v' = g - kv.$$

En ella, k es el coeficiente de rozamiento del aire, por lo que el término que se resta indica el freno de la aceleración producido por esa resistencia del aire y por el mismo paracaídas. En este caso, puede probarse que la velocidad del paracaidista en cada instante t se calcula como:

$$v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}) + v_0 e^{-kt},$$

donde v_0 es la velocidad en el momento en que se abre el paracaídas.

que coincide con lo que hemos indicado en uno de los ejemplos anteriores. (Si el planeta tiene una gravedad menor, de modo que la aceleración de la gravedad en su superficie es de 2 m/s^2, entonces la distancia recorrida por una piedra que se deja caer en su superficie estaría dada por la fórmula $y=t^2$, tal como también dijimos antes.)

La consecuencia matemática de que las funciones del tipo $y=Ce^{kt}$ sean prácticamente iguales a su propia derivada es que éstas aparecen muy frecuentemente como parte de la solución de numerosas ecuaciones diferenciales. Esa es la razón matemática de que la función exponencial (y consecuentemente, el número *e*) aparezca en la descripción de muchos fenómenos naturales. Como dicen los matemáticos Richard Courant y Herbert Robbins:

> «La función exponencial natural [se refiere a $y=e^t$] es idéntica a su derivada. Ésta es la fuente de todas las propiedades de la función exponencial y la razón básica de su importancia en las aplicaciones.»

Hay un problema conocido como el «problema de la catenaria» que puede arrojar luz sobre el asunto. Consiste en determinar qué forma adopta una cuerda que se sostiene por sus dos extremos. Puede tratarse de un cable de alta tensión, de una cadena o de una catenaria, que da nombre al problema ya que la palabra *catenaria* viene de *catena*, que en latín significa, precisamente, «cadena».

Problema de la catenaria:
¿Qué curva corresponde a la forma de una cuerda que se sostiene desde dos puntos?

Este problema fue planteado varias veces a lo largo de la historia y fue estudiado, entre otros, por Leonardo da Vinci (1452-1519) y Galileo Galilei (1564-1642). Pero

les fue imposible resolverlo. Las herramientas matemáticas necesarias para ello no fueron desarrolladas hasta el siglo XVII.

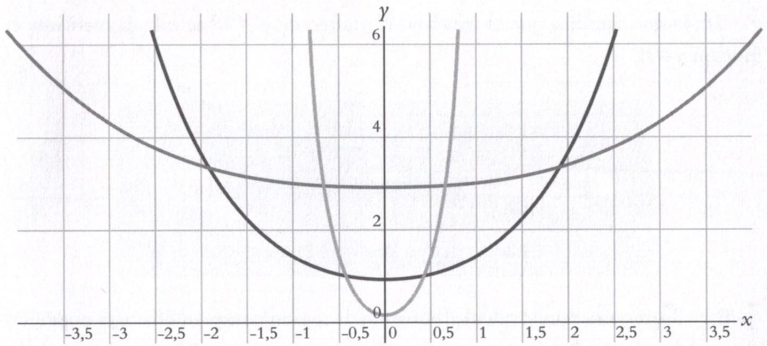
Fue Jakob Bernoulli quien en 1690 sugirió que los conceptos del cálculo desarrollados por Newton y Leibniz quizá permitirían hallar la solución del problema de la catenaria. Y así fue: al año siguiente Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens y Johann Bernoulli lograron encontrar la respuesta de forma independiente. Los matemáticos dedujeron que si y es la función cuyo gráfico corresponde a la curva buscada, entonces esta función tiene que cumplir la siguiente relación, que surge de traducir matemáticamente la acción que ejercen las fuerzas que actúan sobre la cuerda:

$$y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2}.$$

En esta ecuación a es una constante que depende de los parámetros físicos de la cuerda, del cable o de la cadena en cuestión. Y de ella se deduce que la curva buscada es gráfico de la siguiente función:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

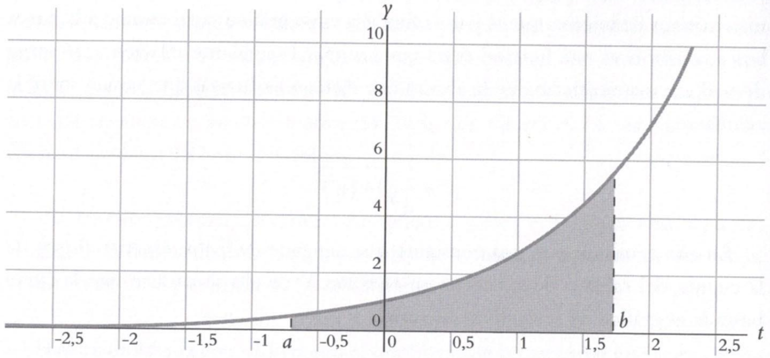
Una fórmula en la que, una vez más, interviene el número e. Esta figura nos muestra el gráfico de la función para diferentes valores de la constante a.



Solución del problema de la catenaria.

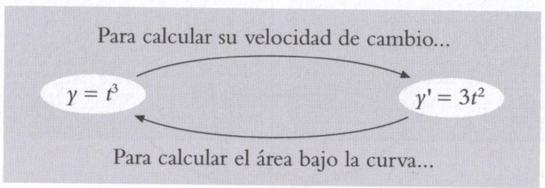
¿Cómo se calcula el área?

Imaginemos que nos es dada una función cuyo gráfico, tal y como se aprecia en la figura siguiente, se encuentra todo el tiempo por encima del eje horizontal. ¿Qué haremos si queremos calcular el área comprendida para todos los valores entre $t = a$ y $t = b$?

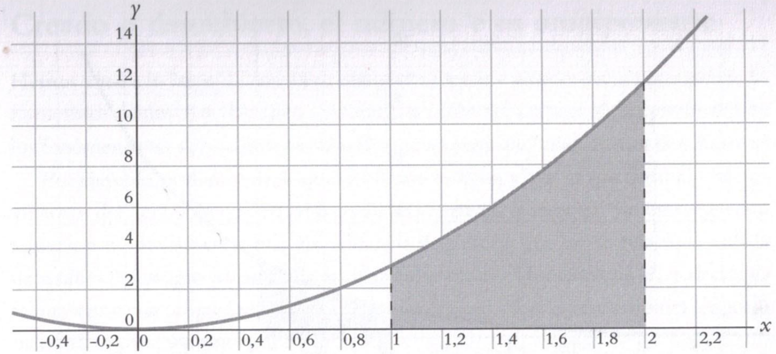


El problema pide, por ejemplo, calcular el área de la región que en la imagen aparece pintada de gris. En este caso la curva corresponde a la función $y = e^t$.

Gracias a uno de los descubrimientos fundamentales del análisis matemático sabemos que «calcular del área» es esencialmente la operación inversa de «calcular la velocidad de cambio».Como ya hemos visto, la derivada de la función $y=t^3$ es $y'=3t^2$; lo que significa que el área bajo el gráfico de $y'=3t^2$ se calcula mediante la función $y=t^3$.

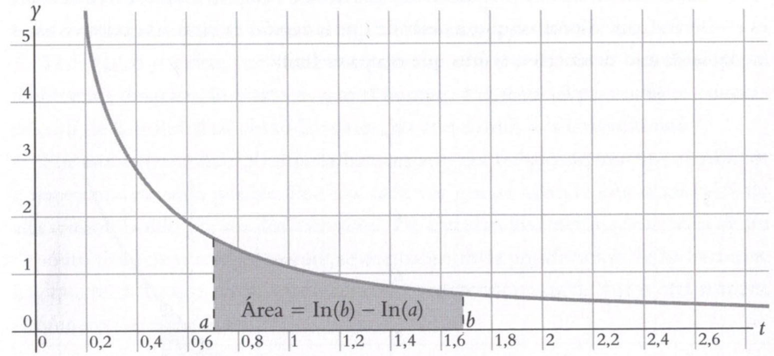


Por ello, si quisiéramos calcular el área de la región comprendida bajo el gráfico de $y = 3t^2$, entre 1 y 2, tal y como muestra la figura siguiente, a 2 le restaríamos el valor de $y = t^3$ y también el valor de 1. El área buscada es, entonces, $2^3-1^3=8-1=7$.



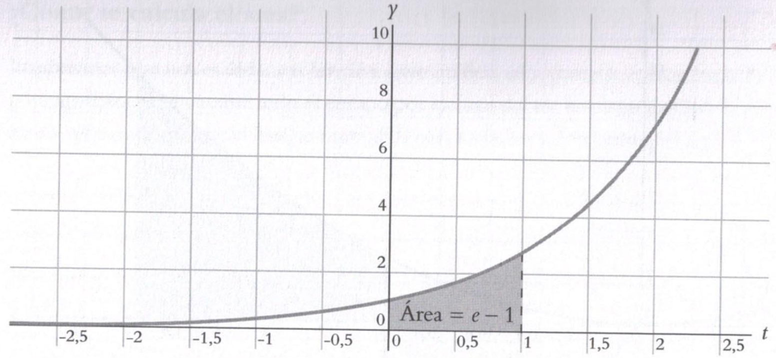
Área de la región bajo el gráfico de $y = 3t^2$, entre 1 y 2.

En el capítulo 1 vimos que, antes de que Newton y Leibniz desarrollaran sus trabajos, Christiaan Huygens ya había determinado que el logaritmo natural es la función que permite calcular el área bajo la hipérbola de ecuación $y=\frac{1}{t}$, tal y como se muestra a continuación. Ahora ya podemos decir que esto se debe al hecho de que la derivada $y=\ln(t)$ es $y'=\frac{1}{t}$.



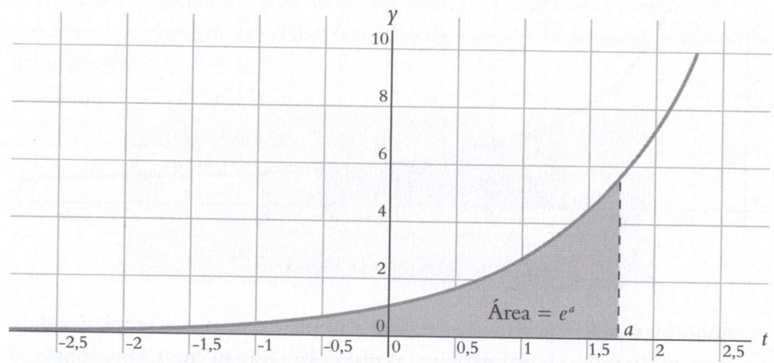
Área de la región bajo el gráfico de $y=\frac{1}{t}$.

Ahora bien, dado que la función exponencial $y = e^t$ es igual a su propia derivada, entonces es ella misma la que permite calcular el área bajo su curva. Por ejemplo, el área de la región comprendida entre 0 y 1 es $e^1 - e^0 = e - 1$:



Área de la región bajo el gráfico y = e^t entre 0 y 1.

Este hecho nos permite obtener una conclusión sorprendente; supongamos que queremos calcular el área bajo la curva $y=e^t$ desde «menos infinito» hasta un valor a cualquiera, como muestra la figura siguiente. Según lo dicho antes, esa área es la resta del valor de la propia función $y=e^t$ en a menos el valor que toma «en menos infinito», es decir, el valor al que se acerca la función cuando t toma valores cada vez «más negativos» (cada vez más «a la izquierda» del eje horizontal). El propio gráfico nos muestra que la función en «menos infinito», vale 0. Por lo tanto, el área buscada es $e^a-0=e^a$. Concluimos así que, a pesar de que la región es ilimitada, pues va hacia la izquierda «sin detenerse», el área que ocupa es finita.



Área de la región bajo gráfico de y = e^t entre «menos infinito» y un número a cualquiera.

Creado o descubierto, el número e es omnipresente

Hemos visto a lo largo de este libro cómo el número e aparece en la descripción de numerosos fenómenos naturales. ¿Es esta ubicuidad del número e una propiedad de los fenómenos en sí, o solamente se refiere al *lenguaje* que usamos para describirlos?

Por ejemplo, podemos decir que el océano es «frío» y que es «profundo», y maravillarnos del hecho de que en ambas palabras aparezca la letra «f». Sin embargo, esta aparición es, obviamente, una coincidencia lingüística que no se relaciona con la naturaleza del propio océano. ¿Es esa idea aplicable a la ubicuidad de e?, es decir, ¿es el número e una propiedad inherente a los fenómenos, o es el resultado del lenguaje matemático que usamos para describirlos?

La cuestión no es baladí y tiene relación con un tema fundamental y filosófico que cuestiona lo siguiente: ¿las matemáticas, se crean o se descubren? En otras palabras ¿son los conceptos matemáticos una creación humana, como el lenguaje?, ¿o existen de forma independiente y van siendo *descubiertos*, tal y como se descubrió el gas helio en 1868, el cual, obviamente ya existía desde tiempos inmemoriales?

En este libro hemos adoptado la postura de que los conceptos matemáticos se descubren, y que de alguna manera el número e ya existía antes de ser «encontrado» por Jobst Bürgi y Jakob Bernoulli. Sin embargo, la postura opuesta también es sostenible, y lo cierto es que a día de hoy los filósofos de las matemáticas no se han puesto todavía de acuerdo acerca de cuál de las dos posturas es la «correcta».

Pero, tanto si existe por sí mismo como si es fruto de cómo describimos los fenómenos naturales, lo cierto es que el número e es esencial para nuestro conocimiento de la realidad tal como la vemos, la entendemos y la transmitimos.

Sin este extraordinario número buena parte del trabajo de muchos científicos e ingenieros no sería posible. Por eso, cada vez que se observa cómo un cable de alta tensión pende por sus dos extremos, o se calculan los intereses bancarios de un depósito financiero o simplemente, se oye hablar de la proliferación de las bacterias, hay que recordar que en esos, y en muchos otros fenómenos, de una u otra manera, el número e está presente.

Anexos

Las primeras mil cifras decimales de *e*

El número *e* vale aproximadamente:

2,

7182818284	5904523536	0287471352	6624977572	4709369995
9574966967	6277240766	3035354759	4571382178	5251664274
2746639193	2003059921	8174135966	2904357290	0334295260
5956307381	3232862794	3490763233	8298807531	9525101901
1573834187	9307021540	8914993488	4167509244	7614606680
8226480016	8477411853	7423454424	3710753907	7744992069
5517027618	3860626133	1384583000	7520449338	2656029760
6737113200	7093287091	2744374704	7230696977	2093101416
9283681902	5515108657	4637721112	5238978442	5056953696
7707854499	6996794686	4454905987	9316368892	3009879312
7736178215	4249992295	7635148220	8269895193	6680331825
2886939849	6465105820	9392398294	8879332036	2509443117
3012381970	6841614039	7019837679	3206832823	7646480429
5311802328	7825098194	5581530175	6717361332	0698112509
9618188159	3041690351	5988885193	4580727386	6738589422
8792284998	9208680582	5749279610	4841984443	6346324496
8487560233	6248270419	7862320900	2160990235	3043699418
4914631409	3431738143	6405462531	5209618369	0888707016
7683964243	7814059271	4563549061	3031072085	1038375051
0115747704	1718986106	8739696552	1267154688	9570350354

Otros hechos curiosos e interesantes sobre el número *e*

Existe una infinidad de situaciones curiosas e interesantes relacionadas con el número e. En el texto hemos mencionado muchas de ellas pero, dado que el número e es inagotable, proponemos aquí una lista de otros hechos (aproximadamente $e^{2,2}$) relacionados con el número e.

1. La serie que subyugó a Asimov

En el capítulo 2 se muestra que el número $1/e$ es el resultado de una *serie*, o lo que es lo mismo, de una suma formada por una cantidad infinita de términos, que se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\cdots$$

Hacia la década de 1970, esta serie despertó el interés del escritor Isaac Asimov (1920-1992), célebre autor de numerosísimas novelas y cuentos de ciencia ficción, así como de una gran cantidad de artículos y libros de divulgación científica.

Asimov, bioquímico y ocasionalmente matemático aficionado («Adoro las matemáticas, pero éstas se muestran completamente indiferentes conmigo», escribió en alguno de sus trabajos), observó que en la serie escrita más arriba puede hacerse la siguiente transformación:

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\cdots$$

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)-\left(\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}\right)-\left(\frac{1}{7!}-\frac{1}{8!}\right)\cdots$$

El escritor de origen ruso también observó lo siguiente:

$$\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}=\frac{3}{4!} \text{ y } \frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}=\frac{5}{6!},$$

y así sucesivamente, por lo que, al reemplazar cada paréntesis por el resultado correspondiente, la serie queda reescrita de la siguiente manera:

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{2!}-\frac{3}{4!}-\frac{5}{6!}-\frac{7}{8!}\dots$$

Definitivamente, una serie de la que cabe resaltar su belleza. En ella, todos los términos, con la única excepción del primero, tienen el mismo signo (negativo, en este caso) y, tal y como podemos observar, cada uno de los números naturales aparece consecutivamente y una sola vez.

Cuando presentó este pequeño aunque elegante descubrimiento, Asimov dijo de él que «hasta que alguien me detenga la voy a llamar la serie de Asimov». Hasta el día de hoy, no nos consta que nadie lo haya detenido.

2. Trucos mnemotécnicos para fans del número *e*

Vimos en el capítulo 4 que el número e es irracional y que tiene, por tanto, una cantidad infinita de cifras decimales no periódicas; estas cifras, además, no siguen ninguna pauta regular o reconocible. Una consecuencia inmediata de todo esto es que resulta verdaderamente difícil retener en la memoria una gran cantidad de cifras decimales de e (lo mismo sucede con π, $\sqrt{2}$ u otros irracionales).

Ahora bien, para aquellos que disfrutan sorprendiendo a sus amigos haciendo gala de un gran poder de retentiva, se han inventado reglas mnemotécnicas que ayudan a recordar los primeros dígitos de la expresión decimal de e. ¿Un ejemplo? Memoricen el siguiente párrafo:

> «El trabajo y esfuerzo de recordar *e* revuelve mi estómago, pero podré acordarme. Será fácil si leo todas las frases. La repetida canción será cantada y así verás el número».

Si nos fijamos en la cantidad de letras que tiene cada una de las treinta palabras del párrafo, obtendremos una secuencia que comienza con 2 7 1 8 2 8... También hay que tener en cuenta que cada punto (excepto el último) equivale a un cero. Estas cifras son, nada más ni nada menos, las primeras cifras decimales de e. De este

modo, si uno memoriza todas las palabras en su orden exacto, podrá recitar fácilmente los primeros 32 dígitos del número e, cuya escritura decimal comienza así:

$$2{,}71828182845904523536028747135 27\dots$$

3. Casi, casi números enteros

La famosa fórmula de Euler, analizada en el capítulo 2, nos dice que $e^{i\pi}$ es exactamente igual a -1. A veces también sucede, por simple coincidencia, que al elevar el número e a una potencia relativamente sencilla se obtiene un número muy cercano a un entero (no exactamente un entero, como en el caso de $e^{i\pi}$, pero sí «casi» un entero).

Un ejemplo de esto lo da el número e^3 que difiere de un entero en poco más de ocho centésimos, dado que $e^3 = 20{,}08553\dots$ Pero un ejemplo todavía más espectacular es el del número $e^{\pi\sqrt{163}}$ que, según descubrió por primera vez el matemático indio Srinivasa Ramanujan (1887-1920), le falta menos de un billonésimo para serlo. En efecto:

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262.537.412.640.768.743{,}99999999999925007\dots$$

4. Fórmulas «al estilo Euler»

Mencionamos en el punto anterior la famosa fórmula de Euler, $e^{i\pi}+1=0$, para muchos la «fórmula matemática más bella de la historia».

Existen otras fórmulas quizá no tan famosas ni elegantes, pero en cierto modo, semejantes a la de Euler. Fórmulas cuya validez puede demostrarse mediante razonamientos similares al que, en su momento, siguió el prolífico matemático para demostrar la suya propia. A continuación mostraremos dos ejemplos.

La primera de estas fórmulas dice que:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}+\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}.$$

Su elegancia reside en que engloba, además de e, π e i, el no menos famoso irracional $\sqrt{2}$. La segunda fórmula, de corte similar, dice que:

$$e^{i\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{-2}.$$

No obstante, en esta última igualdad, $\sqrt{-2}$ debe entenderse como el número complejo $\sqrt{2}i$.

5. Dos al cuadrado, tres al cubo...

Imaginemos que nos empeñamos en elevar números positivos a la potencia que indican esos mismos números. De esta manera calcularemos, por ejemplo, $2^2 = 4$, $3^3 = 27$, o $4^4 = 64$. Imaginemos también que no nos limitamos a trabajar sólo con números enteros, sino que admitimos *cualquier tipo* de número positivo, ya sea racional o irracional; esto quiere decir que también podremos calcular

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Es evidente que si calculamos $2^2, 3^3, 4^4, 5^5\ldots$ iremos obteniendo números que son cada vez más grandes, números que podríamos decir que «tienden hacia el infinito». Pero la pregunta interesante es ¿cuál es la potencia para la cual el resultado es el menor de todos? En otras palabras, ¿qué número x debemos elegir si queremos que x^x nos dé el resultado más pequeño posible?

La respuesta, curiosamente, es que el menor resultado se obtiene tomando $x = \frac{1}{e}$. Es decir que, de todas las potencias de la forma x^x, la menor es

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}},$$

que da aproximadamente 0,6922...

6. Un producto infinito de raíces de *e*

Puede demostrarse que la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots$, conocida como la *serie armónica*, no tiene una suma finita, lo que se expresa de la siguiente forma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots = \infty.$$

Pero la serie $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots$, conocida como la *serie armónica alternada* (porque alterna signos positivos y negativos), sí tiene un resultado finito:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots = \ln 2.$$

En ella, ln 2 (el *logaritmo natural* de 2) es, por definición, la potencia a la que debe ser elevada el número e para que el resultado sea 2. De la igualdad anterior deducimos que:

$$e^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots} = e^{\ln 2}$$

$$e^1 e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{5}}\ldots = 2,$$

de donde obtenemos el siguiente, ciertamente muy curioso, producto infinito de «raíces de *e*»:

$$e\frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt[3]{e}\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\sqrt[5]{e}\ldots = 2.$$

Esta expresión también puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{e}{\sqrt{e}}\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[4]{e}}\frac{\sqrt[5]{e}}{\sqrt[6]{e}}\ldots = 2.$$

7. Irracional elevado a irracional

Ya dijimos que el número e es irracional, como también lo son todas las potencias de e con exponente entero (siempre que no sea cero). Tenemos así, por ejemplo, que los números e^2, e^3, e^{-1} y e^{-2} son todos irracionales. También son irracionales todas las potencias de e cuyo exponente sea una raíz cuadrada, cúbica o de cualquier otro índice, como es el caso, por ejemplo, de los números $e^{\sqrt{2}}$, $e^{\sqrt[3]{7}}$, $e^{-\sqrt{3}}$ y $e^{\sqrt[4]{10}}$.

Sin embargo, hasta el día de hoy no se sabe si el número e^e («*e* elevado a la potencia *e*») es irracional o no. Desde luego, ningún matemático cree seriamente que e^e sea racional. Pero su irracionalidad todavía no ha podido ser demostrada con todo el rigor que exige la ciencia matemática.

Ahora bien, una pregunta que podríamos plantearnos es si es posible, *a priori*, que un número irracional elevado a una potencia irracional dé como resultado un número racional. La respuesta es que, en principio, sí es posible. Para mostrarlo desarrollemos un ejemplo de dos números, A y B, ambos irracionales, tales que al calcular A^B nos dé un número racional.

Comencemos considerando el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. En realidad, este número puede que sea racional o irracional. Pero el aspecto interesante de este ejemplo es que, para desarrollarlo, *no es necesario saber* si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o no; en cualquiera de los dos casos, encontraremos dos números irracionales A y B tales que A^B sea racional.

Supongamos primero que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional. En ese caso, será suficiente con plantear que $A=\sqrt{2}$ y $B=\sqrt{2}$ y, en efecto, obtendremos dos números A y B tales que A^B será un número racional.

¿Pero qué hacemos si en realidad $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional? En ese caso tomaremos $A=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $B=\sqrt{2}$, y de este modo:

$$A^B=\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^{\sqrt{2}.\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2.$$

Por lo tanto, A y B son irracionales, mientras que A^B es racional.

En resumen, no importa si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es o no racional porque en cualquiera de los dos casos se obtienen dos números irracionales A y B tales que A^B es racional.

8. «A elevado a la B»

En el punto anterior hemos hablado de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, «raíz cuadrada de 2 elevado a la raíz cuadrada de 2», pero ¿cómo se define ese número? La respuesta no es para nada obvia. En efecto, $A^2=A\cdot A$ (A multiplicado por sí mismo 2 veces), $A^3=A\cdot A\cdot A$, (A multiplicado por sí mismo 3 veces) $A^4=A\cdot A\cdot A\cdot A$ (A multiplicado por sí mismo 4 veces), y así sucesivamente. Pero esta idea no puede extenderse para definir $A^{\sqrt{2}}$. No podemos decir que «$A^{\sqrt{2}}$ es el resultado de multiplicar A por sí mismo $\sqrt{2}$ veces», ya que la frase «$\sqrt{2}$ veces» no tiene sentido.

Existen muchas formas de definir A^B, donde A y B son números cualesquiera (en realidad, A debe ser positivo), pero una de las más populares involucra el número e. La definición dice que:

$$A^B=e^{B\ln A}.$$

Si tenemos en cuenta, tal como vimos en el capítulo 2, que:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Reemplazando x por $B\ln A$, deducimos que:

$$A^B=e^{B\ln A}=1+B\ln A+\frac{(B\ln A)^2}{2!}+\frac{(B\ln A)^3}{3!}+\frac{(B\ln A)^4}{4!}+\frac{(B\ln A)^5}{5!}+\cdots$$

Por lo tanto, tomando $A=\sqrt{2}$ y $B=\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\ln\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}\ln\sqrt{2}+\frac{(\sqrt{2}\ln\sqrt{2})^2}{2!}+\frac{(\sqrt{2}\ln\sqrt{2})^3}{3!}+\frac{(\sqrt{2}\ln\sqrt{2})^4}{4!}+$$
$$+\frac{(\sqrt{2}\ln\sqrt{2})^5}{5!}+\cdots$$

9. Otra de sumas infinitas

Como hemos recordado en el punto anterior, sabemos que:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Por otra parte, sabemos que $e^{\ln 2}=2$. Si combinamos las dos igualdades, obtenemos la siguiente, y curiosa, suma infinita:

$$1+\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+\frac{(\ln 2)^3}{3!}+\frac{(\ln 2)^4}{4!}+\frac{(\ln 2)^5}{5!}+\frac{(\ln 2)^6}{6!}+\frac{(\ln 2)^7}{7!}+\cdots=2.$$

O también:

$$\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}+\frac{(\ln 2)^3}{3!}+\frac{(\ln 2)^4}{4!}+\frac{(\ln 2)^5}{5!}+\frac{(\ln 2)^6}{6!}+\frac{(\ln 2)^7}{7!}+\cdots=1.$$

10. Trascendente más trascendente, igual a...

En el capítulo 4 hemos hablado de números algebraicos y trascendentes. Recordemos que $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{7}$ son algebraicos, mientras que e, π y $\ln 2$ son trascendentes.

Al sumar dos números algebraicos, puede demostrarse que el resultado es siempre otro número algebraico. Así, por ejemplo, $\sqrt{2}+\sqrt[3]{7}$ es algebraico. También sucede que si sumamos un número algebraico más uno trascendente, el resultado siempre es un número trascendente; por ejemplo, $e+\sqrt{2}$ es trascendente.

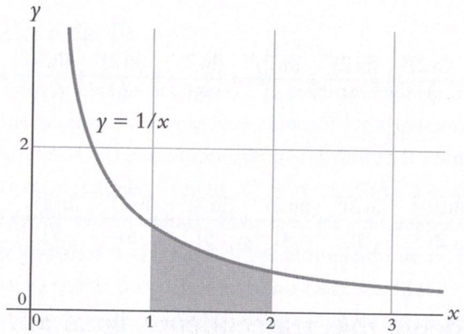
Sin embargo, el resultado de la suma de dos números trascendentes puede ser tanto un número trascendente como uno algebraico. Por ejemplo, $\sqrt{2}-e$ es trascendente y e también lo es, pero su suma $\left(\sqrt{2}-e\right)+e=\sqrt{2}$ es un número algebraico. Por otra parte, $e^2 + e^3$, la suma de dos trascendentes, es un número trascendente.

¿Pero qué sucede con la suma de los dos «trascendentes más famosos», e y π? La verdad es que todavía no se sabe si $e+\pi$ es trascendente o no; ni siquiera se sabe si es racional o no. Todos los matemáticos suponen que $e+\pi$ es irracional y trascendente, pero esto todavía no ha sido matemáticamente demostrado.

11. La cuadratura de la hipérbola

Vimos en el capítulo 4 que el problema de la cuadratura del círculo es irresoluble. Recordemos que, dado un círculo cualquiera, este problema pide construir, usando solamente una regla no graduada y un compás, un cuadrado que tenga la misma área que ese círculo. Cuando decimos que ese problema es irresoluble, lo que estamos afirmando es que, en realidad, esa construcción es irrealizable.

Pero el círculo, como veremos a continuación, no es la única figura que no se puede cuadrar. Consideremos la siguiente imagen:



La curva es la hipérbola de ecuación $y = 1/x$, y como vimos en el capítulo 1, el área de la región sombreada vale $\ln 2$. Dado que este número es trascendente, no es posible construir con regla y compás un cuadrado que tenga esa misma área. En otras palabras: con esos instrumentos, la región sombreada en la imagen no se puede cuadrar. Por el contrario, si extendemos la base del dibujo hasta que llegue al número e, en lugar de al 2, en ese caso el área de la figura será $\ln e = 1$ y en ese caso sí se podría cuadrar la imagen... Sin embargo, el segmento base del dibujo, de longitud $e-1$, no podría dibujarse con regla y compás.

12. El lenguaje matemático en la ciencia ficción

La ciencia ficción suele asumir, probablemente con razón, que si en el futuro llegáramos a tomar contacto con una civilización extraterrestre, las matemáticas podrían servirnos para comunicarnos con ellos. Son incontables las novelas o películas de ciencia ficción en las que, en efecto, los números primos, los dígitos de π, o los teoremas de la geometría elemental, por ejemplo, son usados como «lengua franca».

En la novela *La paja en el ojo de Dios*, de los escritores estadounidenses Larry Niven y Jerry Pournelle, la humanidad se encuentra por primera vez con una civilización alienígena tecnológicamente muy avanzada. En el primer contacto radial entre ambos, los humanos les envían los primeros dígitos decimales de π, y los alienígenas responden con los primeros dígitos de e, pero escrito en base 12, que es la que utilizan porque tienen, en sus tres manos, doce dedos en total.

13. En otras bases

Las primeras cien cifras de e en base 10:

2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724076630353547594571382178525166427.

Las primeras cien cifras de e en binario:

10,10110111111000010101000101100010100010101110110100101010011010101011111101110001010110001000000010.

Las primeras cien cifras de e en base 3:

2,20110112122110201101222210201102122220120222221021221202011211222111000120222211210210201002202022.

Las primeras cien cifras de e en base 16 (o sistema hexadecimal):

2,B7E151628AED2A6ABF7158809CF4F3C762E7160F38B4DA-56A784D9045190CFEF324E7738926CFBE5F4BF8D8D8C31D763DA.

Bibliografía

AMOR, E., *e: Historia de un número*; México, Libraria, 2006.

ASIMOV, I., *De los números y su historia*, Buenos Aires, El Ateneo, 2000.

BELL, E.T., *Historia de las Matemáticas*, México, Fondo de Cultura Económica, 1985.

—: *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.

BOYER, C., *Historia de la Matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 1999.

BUNCH, B. H., *Matemática insólita (paradojas y paralogismos)*, México, Reverté, 1997.

GARDNER, M., *El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos*, Madrid, Alianza Editorial, 1991.

KASNER, E., NEWMAN, J., *Matemáticas e imaginación*, Barcelona, Salvat Editores, 1994.

STEWART, I., *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*, Barcelona, Crítica, 2008.

Índice analítico